

Exercice 2.3. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et soit G un sous-groupe fini de $GL(E)$. Soit $F = \{x \in E; \forall g \in G, g(x) = x\}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

2) Montrer que $\text{Card}(G) \times \dim(F) = \sum_{g \in G} \text{tr}(g)$

$$1) \quad F = \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{Id}_E)$$

est un sous-espace comme intersection de sous-espace

2) Un peu rude, cette question, sans détail.

$$\text{Introduisons } h = \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} g$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Par } f \in G, \quad h \circ f &= \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} g \circ f \\ &= \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g' \in G} g' \end{aligned}$$

car $\phi: G \longrightarrow G$ est bijective, de
 $g \longmapsto g \circ f$
 réciproque $g \mapsto g \circ f^{-1}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad h \circ h &= h \circ \left(\frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} g \right) \\ &= \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} h \circ g \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} h \quad \text{par le point précédent.}$$

$$= h$$

donc h est un projecteur.

• Montrons que $\text{Im } h = F$

* Soit $y \in \text{Im}(h)$ ie $h(y) = y$

$$\begin{aligned} \text{Pour } g \in G, \quad g(y) &= g(h(y)) \\ &= g \circ h(y) \\ &= h(y) \\ &= y \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{même calcul que} \\ \text{ci-dessus.} \end{array}$$

Donc $y \in \text{Ker}(g - \text{Id}_E)$.

Ceci est vrai $\forall g \in G$, donc $y \in \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{Id}_E)$

* Soit $y \in \bigcap_{g \in G} \text{Ker}(g - \text{Id}_E)$.

ie $g(y) = y \quad \forall g \in G$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } h(y) &= \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} g(y) \\ &= \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{g \in G} y \\ &= y \end{aligned}$$

donc $y \in \text{Im}(h)$

On a montré h projecteur sur F .

• On a alors:

$$\text{Card}(G) \times \dim(F) = \text{Card}(G) \text{rg}(h)$$

$$= \text{Card}(G) \text{tr}(h)$$

(résultat classique sur les projections)

$$= \text{Card}(G) \text{tr}\left(\frac{1}{\text{Card}G} \sum_{g \in G} g\right)$$

$$= \sum_{g \in G} \text{tr}(g). \quad \text{par linéarité}$$
