Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{i,j} [AB]_{ij}^2$$

$$= \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)^2$$

transposée de la ligne i de A

colonne j de B

$$\text{or } \forall i,j \quad \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)^2 = \langle L_i^T, C_j \rangle^2$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \|L_i\|^2 \, \|C_j\|^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj}^2 \right)$$

$$\text{donc} \quad \|AB\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj}^2 \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} b_{kj}^2 \right)$$

$$= \|A\|_2^2 \, \|B\|_2^2$$

On a montré que $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est sous-multiplicative.