

**58.1** 

Soit  $n \geq 2$ .

- (a) Pourquoi  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  n'est ni surjective, ni injective.
- (b) On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  d'une norme sous-multiplicative.
  - b1. Soit  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\|U\| < 1$ . Montrer que  $I_n + U$  est inversible, et déterminer son inverse.
  - b2. Montrer que si  $\|M\| < \frac{1}{2}$  et  $\exp(M) = I_n$ , alors  $M = 0$ .
  - b3. En déduire que, sur un voisinage de 0, si  $M$  et  $N$  commutent et satisfont  $\exp(M) = \exp(N)$ , alors  $M = N$ .