CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES 2

Jeudi 2 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

EXERCICE I

Dans cet exercice "Algorithme de décomposition primaire d'un entier" (*Informatique pour tous*), on se propose d'écrire un algorithme pour décomposer un entier en produit de nombres premiers.
Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage **Python**. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

On définit la valuation p-adique pour p nombre premier et n entier naturel non nul.
Si p divise n, on note $v_p(n)$ le plus grand entier k tel que p^k divise n.
Si p ne divise pas n, on pose $v_p(n) = 0$.
L'entier $v_p(n)$ s'appelle la valuation p-adique de n.

Q1. Écrire une fonction booléenne `estPremier(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie le booléen `True` si n est premier et le booléen `False` sinon. On pourra utiliser le critère suivant : un entier $n \geq 2$ qui n'est divisible par aucun entier $d \geq 2$ tel que $d^2 \leq n$, est premier.

Q2. En déduire une fonction `liste_premiers(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et renvoie la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Q3. Pour calculer la valuation 2-adique de 40, on peut utiliser la méthode suivante :

- 40 est divisible par 2 et le quotient vaut 20
- 20 est divisible par 2 et le quotient vaut 10
- 10 est divisible par 2 et le quotient vaut 5
- 5 n'est pas divisible par 2.

La valuation 2-adique de 40 vaut donc 3.

Écrire une fonction `valuation_p_adique(n, p)` **non récursive** qui implémente cet algorithme. Elle prend en arguments un entier naturel n non nul et un nombre premier p et renvoie la valuation p-adique de n. Par exemple, puisque $40 = 2^3 \times 5$, `valuation_p_adique(40, 2)` renvoie 3, `valuation_p_adique(40, 5)` renvoie 1 et `valuation_p_adique(40, 7)` renvoie 0.

Q4. Écrire une deuxième fonction cette fois-ci **récursive**, `val(n, p)` qui renvoie la valuation p-adique de n.

Q5. En déduire une fonction `decomposition_facteurs_premiers(n)` qui calcule la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geq 2$.
Cette fonction doit renvoyer la liste des couples $(p, v_p(n))$ pour tous les nombres premiers p qui divisent n.
Par exemple, `decomposition_facteurs_premiers(40)` renvoie la liste `[[2, 3], [5, 1]]`.

EXERCICE II

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$.

On note $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Q6. Un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout vecteur $x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$, est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

Q7. Étant donné un endomorphisme u de E, on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$.

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

i. $uov = vou$.

ii. $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle v(x), v(y)\rangle$.

iii. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|v(x)\|$.

On pourra, par exemple, successivement prouver les implications :
i $\Rightarrow$ ii, ii $\Rightarrow$ iii, iii $\Rightarrow$ ii et ii $\Rightarrow$ i.

PROBLÈME

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.
Par la suite, n désigne un entier naturel, $n \geq 2$.

Partie I – Étude de quelques exemples

Q8. Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Q9. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique.
Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).
Ont-elles le même polynôme minimal ?

Q10. On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :
première méthode : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1,e_2,e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E ;
deuxième méthode : en prouvant que le polynôme X^3-3X-1 admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

Q11. Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & 0 & a_1 \\ . & . & . & . & a_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pourra utiliser l'endomorphisme u canoniquement associé à la matrice A.

Q12. *Application* : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u un endomorphisme de E de rang 1 vérifiant $uou \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.
On pourra calculer U^2.

Q13. Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

Q14. On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α et β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.
Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.
Justifier que $2(\alpha+\beta)$ et $2(\alpha-\beta)$ sont aussi valeurs propres de A.
Préciser une base de vecteurs propres de A.
Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de la matrice A.

Q15. Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ, les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

Q16. Démontrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q17. Justifier que la fonction $x \mapsto \det(R + xS)$ est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $R + xS$ soit inversible.

Q18. Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q19. *Application* : démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III

On s'intéresse dans cette question à la proposition P_n :
« Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

Q20. En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition P_n est vraie pour $n = 2$.

On admet qu'elle l'est également pour $n = 3$.

Q21. Démontrer que la proposition P_n est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.

FIN