993.1

$1 \in H_q$. Si $z^{q^n} = 1$ et $z'^{q^m} = 1$, alors en notant $u = \max(m,n)$, $(zz')^{q^u} = 1$. La stabilité par passage à l'inverse est simple. On peut aborder la densité en vérifiant que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $z = e^{i\theta} \in H_q$ avec $0 < \theta < \epsilon$ (par exemple $\theta = 1/q^n$ avec n assez grand). Tous les z^m sont dans H_q et (faire un dessin) on en déduit assez facilement la densité, plutôt par les boules que par les suites.

993.2

Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} p_k X^k$, $P \circ Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} p_k Q^k$. Si Q est constant le degré est 0 ou $-\infty$. Si Q n'est pas constant, en supposant $p_d \neq 0$, le degré vaut $\deg(P) \times \deg(Q)$. Formule donc à peu près toujours vraie, si P et Q non nuls. On note que le neutre est X. Et que $\deg(P) \times \deg(Q) = 1$ impose $\deg(P) = \deg(Q) = 1$, la condition est donc nécessaire. Un calcul rapide montre qu'elle est bien suffisante.

993.3

993.4

993.5

Une fois montré la bijectivité en exhibant la réciproque (attention, ce n'est pas un morphisme), il est judicieux de faire le travail en deux étapes : d'abord montrer que $h \circ p = p$ pour tout $h \in G$, puis conclure $p \circ p = p$.

993.6

Passant à la matrice A associée dans une base quelconque et trigonalisant cette matrice sur $\mathbf{C}$, les valeurs propres étant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes), le coefficient de X^{n-2} vaut la fonction symétrique élémentaire

$$\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

qui est égale à

$$\frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2\right)$$

qui vaut $\dfrac{1}{2}\Big((\mathrm{Tr}(u))^2 - \mathrm{Tr}(u^2)\Big)$.

993.7

993.8

993.9

993.10

993.11

En dérivant directement $\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$ ou, plus élégant, en remarquant que si l'on note $\Delta(P) = \dfrac{P'}{P}$ on a $\Delta(PQ) = \Delta(P) + \Delta(Q)$, on obtient

$$\frac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \lambda - k}$$

ce qui mène au résultat.

993.12

993.13

Si $AB = I_n$ avec A et B dans $M_n(\mathbf{Z})$, on a $\det(A) \times \det(B) = 1$, or si un produit d'entiers vaut 1, chaque entier vaut ± 1. La réciproque vient de l'expression de l'inverse avec la comatrice.

993.14

993.15

Montrer que $u \in L(\mathbf{C}^n)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

993.16

- *Première idée*
  On montre d'abord que si Q est un polynôme, $Q(\Phi_A) \ : \ M \mapsto Q(A)M$. On en déduit que Φ_A et A ont même polynôme minimal donc mêmes valeurs propres. Soit λ l'une d'entre elles :

$$\Phi_A(M) = \lambda M \iff \mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$$

  La dimension du sous-espace propre associé est donc $n \times \dim\left(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\right)$. Les valeurs propres sont les mêmes, les multiplicités sont multipliées par n. Si on est sur $\mathbf{C}$, on en déduit

$$\mathrm{Tr}(\Phi_A) = n\mathrm{Tr}(A) \qquad , \qquad \det(\Phi_A) = (\det(A))^n$$

  Le détour par $\mathbf{C}$ (pour avoir un polynôme caractéristique scindé, et donc les relations classiques entre trace, déterminant et valeurs propres) ne change rien : si on écrit dans la bas canonique de $M_n(\mathbf{K})$ la matrice de Φ_A, quand A est réelle cette matrice est la même sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$.

- *Seconde idée*
  On note E_{ij} les matrices élémentaires, et $A = (a_{ij})$, c'est-à-dire que $A = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell} E_{k,\ell}$. On calcule :

$$\begin{aligned}\varphi(E_{ij}) &= \sum_{k,\ell} a_{k,\ell} E_{k,\ell} E_{i,j} \\ &= \sum_{k,\ell} a_{k,\ell} \delta_{\ell,i} E_{k,j} \\ &= \sum_{k} a_{k,i} E_{k,j}\end{aligned}$$

  En particulier, $\varphi(E_{ij}) = a_{ii} E_{i,j} + \dots$ donc les coefficients diagonaux de la matrice de φ dans la base (E_{ij}) sont les a_{ii}.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i,j} a_{i,i} = n\,\mathrm{tr}(A)$$

  Pour le déterminant, on a besoin de préciser la matrice de φ, et donc d'ordonner les vecteurs de la base (E_{ij}) en $(E_{11}, E_{21}, E_{31}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots)$. Dans cette base, la matrice de φ est, par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A \end{pmatrix}$$

993.17

993.18

993.19

993.20

993.21

Evidemment on peut se demander ce qu'ici on appelle un hyperplan. Je dirais un espace de dimension $n-1$ où $n = \dim(E)$.

993.22

993.23

993.24

993.25

993.26

993.27

993.28

993.29

993.30

Pour l'unicité, on pourra remarquer que si $\exp(A) = B$, alors $AB = BA$. Si de plus A et B sont diagonalisables, elles le sont simultanément, i.e. avec la même matrice de passage.

993.31

993.32

993.33

Toutes les vp strictement négatives, non (ne serait-ce qu'en regardant la trace). Une unique valeur propre > 0 oui, et c'est assez évident...mais l'interrogateur veut sans doute mieux, toutes les valeurs propres strictement négatives sauf une, ce qui peut se faire avec une matrice $\alpha I_n + \beta J$ bien choisie (avec $J = (1)$).

993.34

993.35

993.36

993.37

993.38

L'énoncé le plus général est aussi le plus simple à établir : l'image continue d'un compact est un compact.

993.39

993.40

993.41

993.42

993.43

993.44

993.45

993.46

993.47

993.48

993.49

993.50

993.51

993.52

993.53

Γ, ce n'est pas vraiment du cours, mais presque.

993.54

$\boxed{993.55}$

$\boxed{993.56}$

$\boxed{993.57}$

$\boxed{993.58}$

$\boxed{993.59}$

$\boxed{993.60}$