993.1

Soit $\mathbf{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1. Soit q un entier ≥ 2 fixé. On pose

$$H_q = \{z \in \mathbf{C};\ \exists n \in \mathbf{N}\ z^{q^n} = 1\}$$

Montrer que H_q est un sous-groupe dense de $\mathbf{U}$.

993.2

Rappeler, pour tous $P, Q \in \mathbf{C}[X]$, la définition de $P \circ Q$ et préciser le degré de ce polynôme.
Montrer que seuls les polynômes de degré 1 possèdent un inverse pour la loi $\circ$.

993.3

Soit I un idéal de $\mathbf{Q}[X]$ distinct de $\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme $\mu \in \mathbf{Q}[X]$ tel que $I = \mu\mathbf{Q}[X]$.

993.4

Pour tous $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, on pose $[A, B] = AB - BA$. Montrer que $\mathrm{Tr}([A, B]) = 0$.

993.5

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, G un sous-groupe fini de $GL(E)$, $p = \dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{g \in G} g$. Montrer que, si $h \in G$, $g \mapsto h \circ g$ est une bijection de G sur lui-même, puis que p est un projecteur.

993.6

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in L(E)$. Calculer, en fonction de $\mathrm{Tr}(u)$ et $\mathrm{Tr}(u^2)$, les coefficients de X^{n-1} et de X^{n-2} du polynôme caractéristique de u.

993.7

Donner le lien entre l'inverse d'une matrice carrée inversible et sa comatrice.

993.8

Enoncer et démontrer le lemme des noyaux.

993.9

Montrer que les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique.

993.10

Pour $A \in M_n(\mathbf{K})$, rappeler la définition des polynômes minimal π_A et caractéristique χ_A. Donner une condition nécessaire et suffisante sur π_A pour que A soit trigonalisable. Donner le définition et la dimension du sous-espace caractéristique de A associé à la valeur propre λ.

993.11

Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. On pose $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Donner et démontrer la décomposition en éléments simples de P'/P. En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{C} \setminus \mathrm{Sp}(A),\ \frac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)} = \mathrm{tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right)$$

993.12

Rappeler les relations coefficients-racines pour un polynôme complexe.

993.13

On note $GL_n(\mathbf{Z})$ l'ensemble des matrices $M \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que M et M^{-1} sont à coefficients entiers. Rappeler la définition de la comatrice. Montrer que $GL_n(\mathbf{Z})$ est l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{Z})$ dont le déterminant vaut ± 1

993.14

Rappeler le théorème de Cayley-Hamilton et le prouver dans le cas diagonalisable.

993.15

Montrer que $u \in L(\mathbf{C}^n)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

993.16

Soit $E = M_n(\mathbf{R})$, $A \in E$, $\Phi_A \ : \ M \in E \mapsto AM$. Déterminer la trace de le déterminant de Φ_A

993.17

Rappeler les définitions de morphisme de groupe et d'ordre d'un élément.

993.18

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ à coefficients positifs telle que la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1. Montrer que 1 est valeur propre de M puis que toute valeur propre λ complexe de M vérifie $|\lambda| \leq 1$.

993.19

Définir l'exponentielle d'une matrice de $M_n(\mathbf{C})$. Pour $P \in GL_n(\mathbf{C})$, montrer que

$$\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$$

993.20

Justifier la définition de l'exponentielle de matrice. Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ où $t \in \mathbf{R}$

993.21

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Montrer que, pour tout hyperplan H de E, il existe $a \in E$ tel que $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$.

993.22

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On considère une base orthonormale $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

(a) Exprimer les coordonnées et la norme d'un vecteur x de E à l'aide des éléments de B.

(b) Exprimer les coefficients de A, B et $A^T B$ à l'aide de produits scalaires.

993.23

(a) Rappeler le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

(b) Soit $M \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbf{R}$ et T triangulaire supérieure telles que $M = OT$.

993.24

On note E l'ensemble des fonctions réelles continues et de carré intégrable sur $\mathbf{R}^+$. Définir la notion de fonction intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que, pour $f, g \in E$, fg est intégrable et en déduire que E est un espace vectoriel.

993.25

Soit E un espace vectoriel euclidien. Montrer que toutes les valeurs propres d'une isométrie vectorielle de E sont de module 1.

993.26

Pour tout $t \in]-1,1[$, on note $\omega(t) = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$. Pour $P, Q \in \mathbf{R}_n[X]$ on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\omega(t)\mathrm{d}t$. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$.

993.27

Montrer que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux.

993.28

Montrer que $(O_n(\mathbf{R}), \times)$ est un groupe.

993.29

Soit A une matrice antisymétrique réelle de taille n et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé.

(a) Enoncer le théorème du rang.

(b) On suppose que A est inversible. Montrer que n est pair.

(c) On suppose $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Quer dire de f^* ?

993.30

(a) Rappeler la définition d'une matrice symétrique définie positive. Caractérisation à l'aide du spectre ?

(b) Montrer que l'exponentielle définit une bijection continue de $S_n(\mathbf{R})$ sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

993.31

(a) Rappeler la définition d'une matrice symétrique définie positive. Caractérisation à l'aide du spectre ?

(b) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = B^2$. Montrer son unicité. Indication : Considérer les sous-espaces propres de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

993.32

Soient E et F deux espaces euclidiens de dimensions respectives n et m.

(a) Soit $u \in L(E,F)$. Montrer qu'il existe un unique $u^* \in L(F,E)$ tel que $\forall x \in E, \forall y \in E,\ \langle u(x), y\rangle_F = \langle x, u^*(y)\rangle_E$.

(b) Montrer que u^*u est autoadjoint positif.

993.33

Soit $s \in S^+(E)$. Montrer qu'il existe un unique $r \in S^+(E)$ tel que $s = r^2$.

993.34

(a) Soit $M \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer que $M \in S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbf{R}^+$.

(b) Soit $M \in S_n(\mathbf{R}^+)$ c'est-à-dire symétrique à coefficients positifs. Est-ce que toutes les valeurs propres de M peuvent être strictement négatives ? Peut-on trouver M avec une unique valeur propre strictement positive ?

993.35

Soient $a < b$ des réels fixés. On munit l'espace $E = C^0([a,b], \mathbf{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. On fixe un entier naturel $n \geq 0$ et $f \in E$, et on pose $m = d(f, \mathbf{R}_n[X])$. On pose $C = \{g \in \mathbf{R}_n[X]\ ;\ \|f - g\|_\infty \leq m + 1\}$. Montrer que C est compact et non vide. En déduire qu'il existe $p \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $m = \|f - p\|_\infty$.

993.36

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ soit convergente. La démontrer.

993.37

Soient E et E' deux espaces vectoriels normés et $u \in L(E, E')$. Montrer que u est continue sur E si et seulement si elle est continue en 0.

993.38

Rappeler le théorème de Weierstrass.

993.39

Enoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.

993.40

Rappeler le théorème de Heine.

993.41

Pour $A \in M_p(\mathbf{K})$ on pose $\|A\| = \underset{1 \leq i \leq p}{\mathrm{Max}} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}|$. Montrer que $\|.\|$ est une norme et que, pour toutes $A, B \in M_p(\mathbf{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$.

993.42

Rappeler la définition de la borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbf{R}$. On note X une partie non vide minorée de $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de X qui converge vers la borne inférieure de X. Réciproquement, prouver que si une suite de X converge vers un minorant m de X, alors m est la borne inférieure de X.

993.43

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbf{R})$ à coefficients dans $[-1, 1]$.

(a) Montrer la continuité du déterminant sur $M_n(\mathbf{R})$.

(b) Montrer que le déterminant admet un maximum α sur $\mathcal{A}$.

993.44

Montrer que les parties connexes par arcs de $\mathbf{R}$ sont ses parties convexes.

993.45

Soit $(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. La réciproque est-elle vraie ?

993.46

Comparaison série-intégrale. L'utiliser pour montrer $H_n \sim \ln n$ avec $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

993.47

Enoncer le théorème de Rolle. Soit $a, b \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$. Montrer que le théorème reste vrai pour f dérivable sur $]a, b[$ et admettant en a et b une même limite finie.

993.48

Démontrer le théorème des accroissements finis (on dit bien le théorème, pas l'inégalité).

993.49

Soit I intervalle non vide et $f \in C(I, \mathbf{R})$. Montrer que pour tout $a \in I$ l'application $F_a \ : \ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable, de dérivée f.

993.50

Enoncer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions.

993.51

Retrouver le développement en série entière de la fonction arctan et montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

993.52

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Donner $R > 0$ tel que

$$\forall x \in]-R, R[\quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Que vaut $\displaystyle\binom{\alpha}{n}$?

993.53

(a) Soit $\displaystyle\sum_n z^n$ une série entière qui converge sur $]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$. Montrer que sa somme est de classe C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$.

(b) Est-ce que toute fonction de classe C^∞ sur un ouvert contenant 0 est développable en série entière au voisinage de 0 ?

993.54

(a) Rappeler le théorème de convergence dominée.

(b) Montrer que $\Gamma \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbf{R}_*^+$.

(c) Montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

993.55

Rappeler la formule de Stirling.

993.56

Montrer que toute série numérique absolument convergente est convergente.

993.57

(a) Soit G un ensemble non vide. Rappeler les conditions sur la loi * pour que $(G, *)$ soit un groupe.

(b) Rappeler la définition de la différentielle en un point. Faire le lien avec les dérivées partielles dans le cas C^1.

993.58

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ différentiable. On suppose que f admet un extremum en $a \in \mathbf{R}^n$. Rappeler la valeur de $\nabla f(a)$ (avec démonstration).

993.59

Soient X et Y deux variables aléatoires de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $\min(X, Y)$.

993.60

La fonction de répartition d'une variable aléatoire F est $F_X : t \mapsto \mathbf{P}(X \leq t)$. Montrer que F_X est croissante de limite 1 en $+\infty$.

993.61

Soit $\alpha \in \mathbf{R}_*^+$, $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in \mathbf{N}_*$, $X_i \sim \mathcal{P}\left(\frac{\alpha}{i}\right)$. Pour $n \in \mathbf{N}_*$, quelle est la loi de $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$?