992.1

(a) Exercice 34 Analyse .

(b) On considère l'application : $\forall (P,Q) \in (\mathbf{R}[X])^2, (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

b1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

b2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

b3. Calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\mathrm{d}t$.

(a) Bien penser à dire que $(.\mid.)$ est bien défini (intégrale d'une fonction continue sur un segment). Puis symétrique, puis bilinéaire, puis positive, puis…
Si $(P|P) = 0$, P^2, continue et positive sur $[0,1]$, est nulle (donc P aussi) sur le segment $[0,1]$ qui est un ensemble infini. Et un polynôme qui a une infinité de racines est nul.
(b) Inutile de déranger Gram-Schmidt explicitement…mais l'interrogateur peut vous le demander. Cela dit, c'est un peu ce qu'on fait en disant d'abord que 1 est unitaire. On cherche ensuite un $\alpha t + \beta$ unitaire et orthogonal à 1. L'orthogonalité à 1 donne $\beta + \alpha/2 = 0$, donc $\alpha t + \beta = \beta(1-2t)$. Or

$$\int_0^1 (1-2t)^2 \ \mathrm{d}t = 1 - 2 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

(on développe ou on primitive directement, peu importe). On obtient donc $\beta = \sqrt{3}$. Donc $(1, -2\sqrt{3}\ t + \sqrt{3})$ répond à la question (mais bien sûr n'est pas unique).
(c) On formalise un peu les choses : si $F = \mathrm{Vect}(1,t)$, si $y = t^2$ (on aura noté qu'on confond sans scrupule polynôme et fonction polynôme), on cherche

$$\operatorname*{Inf}_{x\in F} \|y - x\|^2$$

On sait que cette borne inférieure est atteinte en un point unique $x = p_F(y)$. Faire un petit dessin au tableau sera apprécié. Or (cours)

$$p_F(y) = (1|y)y + \left(-2\sqrt{3}\ t + \sqrt{3} \ \mid\ y\right)(-2\sqrt{3}\ t + \sqrt{3})$$

Mais on va se tromper dans le calcul en utilisant cette méthode. Mieux vaut dire que la quantité à minimiser s'écrit (en utilisant $\displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$)

$$\phi(a,b) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}a^2 + b^2 - \frac{a}{2} - \frac{2b}{3} + ab$$

Cherchons les points critiques : il s'agit de résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a & + & b & = & \frac{1}{2} \\ a & + & 2b & = & \frac{2}{3} \end{cases}$$

Il y a une solution unique : $(a,b) = (1, -1/6)$. On sait qu'il y a un minimum global unique, il n'y a qu'un point critique, c'est donc nécessairement en ce point qu'est atteint le minimum, qui vaut donc

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{180}$$

(résultat non garanti !)

992.2

(a) Exercice 74 Algèbre .

(b) Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-(nx)^2)$.

b1. Déterminer l'ensemble de définition de S.

b2. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.

b3. Calculer la limite de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b4. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-(xt)^2\right) \mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

b5. En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

Pour $x = 0$, grossière divergence. Pour $x \neq 0$, on peut par exemple écrire

$$\exp(-(nx)^2) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\exp(-nx^2)\right)$$

d'où la convergence par comparaison à une série géométrique de rapport
$e^{-x^2} \in]0,1[$. La convergence par comparaison à une série de Riemann est aussi possible, ne pas oublier alors d'invoquer les croissances comparées et de savoir les justifier en détail.
Posons $f_n \ : \ x \longmapsto e^{-n^2x^2}$. Il y a convergence normale de $\sum f_n$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En effet, f_n est décroissante positive sur $]0, +\infty[$, et donc si $a > 0$

$$N_\infty\left(f_n|_{[a,+\infty[}\right) = f_n(a)$$

Il y a donc convergence uniforme, car normale, sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$, et les f_n sont continues. Et la parité conclut.
La convergence uniforme sur $[1, +\infty[$ (ou sur $[a, +\infty[$ pour n'importe quel $a > 0$) permet d'appliquer le théorème de la double limite (attention, la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas !) et de trouver que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
Dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$ on fait le changement de variable $t = \sqrt{2}\, xu$ (on n'oublie pas, pour les bornes, $x > 0$) :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\ x \ \int_0^{+\infty} \exp\left(-(xu)^2\right) \mathrm{d}u$$

La fonction $t \longmapsto \exp\left(-(tx)^2\right)$ est, si $x > 0$, décroissante continue sur $[0, +\infty[$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-(xt)^2\right) \mathrm{d}t \ \leq S(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \exp\left(-(xt)^2\right) \mathrm{d}t$$

D'où l'équivalent cherché : $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}$.

992.3

(a) Exercice 10 Analyse .

(b) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On définit l'application $\varphi : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ par :
$\forall P \in \mathbf{R}[X], \varphi(P) = P(u)$.

b1. En prenant $u = \mathrm{Id}_E$, calculer $\varphi(P)$.
Soit A une partie non vide de E. On introduit
$I = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \forall x \in A, P(u)(x) = 0_E\}$.

b2. Montrer que I est un idéal de $\mathbf{R}[X]$ non réduit au polynôme nul.
En déduire que $I = P_A(X)\mathbf{R}[X]$ avec $P_A(X)$ unitaire.

b3. On suppose que $A_1 \subset A_2$ avec A_1 et A_2 deux parties non vides de E.
Montrer que $P_{A_1}(X)$ divise $P_{A_2}(X)$.

b4. On pose $A = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 deux parties non vides de E.
Montrer que $P_A(X) = \mathrm{PPCM}(P_{A_1}(X), P_{A_2}(X))$.

b5. On note $F = \mathrm{Vect}(A)$. Montrer que $P_A(X) = P_F(X)$.

$P(\mathrm{Id}_E) = \widetilde{P}(1)\ \mathrm{Id}_E$. On vérifie sans problème que $0 \in I$, $P - Q \in I$ si P et Q sont dans I, et si $P \in I$ et $T \in \mathbf{R}[X]$, $TP \in I$.
Et le polynôme minimal de u, π_u, est dans I (ou encore : $(x, u(x), \dots, u^n(x))$ est liée si $n = \dim(E)$, d'où l'on déduit l'existence d'un polynôme P non nul dans I).
Puis structure des idéaux de $\mathbf{R}[X]$.
Or, si $A_1 \subset A_2$, $P_{A_2} \in I_{A_1}$ (notations évidentes), donc $P_{A_1} \mid P_{A_2}$.
Donc, si $A = A_1 \cup A_2$, P_{A_1} et P_{A_2} divisent P_A, donc $\mathrm{PPCM}(P_{A_1}, P_{A_2})$ divise P_A.
Mais si $Q = \mathrm{PPCM}(P_{A_1}, P_{A_2})$, alors pour tout $x \in A_k$ $(k = 1, 2)$ on a $Q(u)(x) = 0_E$, donc pour tout $x \in A$ on a $Q(u)(x) = 0_E$. Et donc P_A divise Q. Or deux polynômes unitaires qui se divisent mutuellement sont égaux.
Dernière question : $A \subset F$, donc P_A divise P_F. Soit $x \in F$, il existe $a_1, \dots, a_q$ dans A tels que

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_q a_q$$

où les α_k sont réels. Et donc $P_A(u)(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{q} \alpha_k P_A(u)(a_k) = 0_E$ et on conclut.
Exercice peu drôle, on a intérêt à faire attention aux parenthèses.

992.4

(a) Exercice 99 Algèbre .

(b) b1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} \mathrm{d}x$.

b2. Démontrer le théorème utilisé à la question précédente.

Notant $f_n\ :\ x \longmapsto ne^{-nx}$ définie sur $[1, 2]$,

$$N_\infty(f_n) = ne^{-n}$$

Or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} ne^{-n}$ converge, on peut intervertir par convergence uniforme, car normale, sur un segment. Mais

$$\int_1^2 ne^{-nx}\mathrm{d}x = e^{-n} - e^{-2n}$$

donc l'intégrale vaut $\dfrac{1}{e}\dfrac{1}{1-e^{-1}} - \dfrac{1}{e^2}\dfrac{1}{1-e^{-2}}$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{e-1} - \dfrac{1}{e^2-1}$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{e-1}\left(1 - \frac{1}{e+1}\right) = \frac{e}{e^2-1}$$

On démontre ensuite l'interversion pour une suite de fonctions convergeant uniformément sur un segment, par l'inégalité

$$\left|\int_1^2 S_n - \int_1^2 S\right| \leq (2-1)\|S - S_n\|_\infty$$

et on applique à la suite des sommes partielles.

992.5

(a) Exercice 95 Probabilités .

(b) Les questions $a)$ et $b)$ sont indépendantes.

b1. Soit f définie par : $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x^a}$ avec $a > 0$.

i. Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si $a \in]1, 3[$.

ii. On suppose $a \in]0, 1[$. En considérant la suite (u_n) définie par : $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x$, montrer que f n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

b2. Soit $\alpha > 0$.

i. Calculer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}}.$$

ii. Étudier la convergence de la série en $x = 1$ et $x = -1$.

Un équivalent en 0 à x^{2-a} $(2 - a > -1)$, licite car la fonction est positive, donne l'intégrabilité sur $]0, 1]$. En $+\infty$, un grand O de x^{-a} va bien $(-a < -1)$. Pour la non intégrabilité avec $a \in]0, 1[$ suivre les considérations vues dans le cours pour $\sin x/x$. Il vaut mieux savoir calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 t\mathrm{d}t$ en linéarisant $\sin^2 t$.

De $1 \leq 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \ldots + \dfrac{1}{n^\alpha} \leq n + 1$ on déduit que le rayon de convergence vaut 1. Si $\alpha > 1$, il y a divergence grossière en ± 1.

Si $0 < \alpha \leq 1$, il y a convergence en -1 par théorème sur les séries alternées.

En 1, il faut une évaluation asymptotique.

Pour $\alpha = 1$, $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \leq 1 + \ln n$ (comparaison somme-intégrale), il y a donc divergence en 1 par comparaison par exemple à $1/n$ (croissances comparées).

Pour $\alpha \in]0, 1[$, $1 \leq 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} + \ldots + \dfrac{1}{n^\alpha} \leq 1 - \dfrac{1}{1-\alpha} + \dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Par comparaison on déduit la divergence en $x = 1$.

992.6

(a) Exercice 80 Algèbre .

(b) On pose : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

b1. Montrer que ζ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

b2. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées sous forme de séries.

b3. Étudier les variations de ζ.

b4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.

b5. Donner un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+.

Exercice classique fait pendant l'année. Bien penser que la convergence uniforme sur tout segment ne suffit pas pour appliquer le théorème de la double limite (question (d)), et que la connaissance de ζ' n'est pas nécessaire pour (c). Pour (e) on fait une comparaison série-intégrale.

992.7

(a) Exercice 64 Algèbre .

(b) b1. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

b2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \geqslant 2$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{x\exp(-nx)}{\ln(n)}$.

i. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
ii. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
iii. Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Montrer la convergence uniforme de cette série sur $[a,b]$.
iv. Montrer la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ (*indication : utiliser le reste*).

(a) est le cas des séries de Bertrand qui nécessite une comparaison série/intégrale. On trouve une série divergente.
Pour (b)i., la convergence simple en 0 ne pose pas de problème. Si $x > 0$,

$$f_n(x) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(e^{-nx}\right)$$

et $e^{-x} \in]0,1[$, donc par comparaison à une série géométrique il y a convergence.
Pour $x < 0$, il y a divergence grossière, par croissances comparées (voire d'Alembert).
Pour la convergence normale, pas besoin d'étudier la fonction f_n (mais on peut le faire, c'est assez facile). Il suffit de se souvenir de (a) et de calculer $f_n(1/n)$ pour voir qu'il n'y a pas convergence normale.
En revanche il y a convergence normale sur tout segment $[a,b]$ où $0 < a < b$ puisqu'à partir d'un certain rang $N_\infty\left(f_n|_{[a,b]}\right) = f_n(a)$.
On a avec des notations évidentes

$$|R_n(x)| \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-nx}}{e^x - 1}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ est prolongeable par continuité à $[0,+\infty[$, de limite nulle en $+\infty$, donc bornée. Il existe donc M tel que

$$\forall x \geq 0 \qquad |R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)}$$

d'où l'uniforme continuité.

992.8

(a) Exercice 51 Analyse .

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une famille libre.

b1. Justifier que A est diagonalisable.

b2. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

b3. Que vaut $\det(A)$?

(a) $X^n - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$.
(b) Et c'est le polynôme minimal, vu la deuxième partie de l'hypothèse, donc les valeurs propres sont les éléments de $\mathbf{U}_n$ et sont simples, leur somme est nulle.
(c) Pour les mêmes raisons,

$$\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\frac{(n-1)n}{2}\right) = (-1)^{n-1}$$

992.9

(a) Exercice 5 Analyse .

(b) Soit $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On définit l'application trace : $\mathrm{Tr} \ : \ E \longrightarrow \mathbf{R}$.

b1. i. Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbf{R}$.
ii. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$?
iii. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans E.

b2. On pose $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par : $\forall M \in E, f(M) = M + \mathrm{Tr}(M) I_n$.
Montrer que f est diagonalisable.

b3. Soit J une matrice non nulle de E telle que $\mathrm{Tr}(J) = 0$.
On pose $g : E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par : $\forall M \in E, g(M) = M + \mathrm{Tr}(M) J$.
i. Montrer que $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
ii. g est-il diagonalisable ?

(a) On note constructivement que tout réel x s'écrit

$$x = n\frac{x}{n} = \mathrm{Tr}\left(\frac{x}{n} I_n\right)$$

Ou plus sophistiqué : comme Tr est linéaire, si elle n'est pas surjective alors son image est un sous-**R**-espace vectoriel de **R** qui n'est pas **R** et qui est donc $\{0\}$. Or il y a des matrices de trace non nulle.
Par théorème du rang, $\dim\left(\mathrm{Ker}(Tr)\right) = n^2 - 1$ et comme $\mathrm{Vect}(I_n)$ est une droite non incluse dedans, ils sont en somme directe, et avec les dimensions on conclut à la supplémentarité.
(b) $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace propre, associé à la valeur propre 1. Et I_n est vecteur propre, associé à la valeur propre $n+1$. Donc E est somme directe des sous-espaces propres.
(c) i. On calcule

$$(g^2 - 2g + \mathrm{Id})(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J + \mathrm{Tr}\left(M + \mathrm{Tr}(M)J\right)J - 2\left(M + \mathrm{Tr}(M)J\right) + M$$

et on trouve bien (0). Si g était diagonalisable, son polynôme minimal serait scindé à racines simples, divisant $(X-1)^2$ ce serait $X - 1$, on aurait $g = \mathrm{Id}$, non.

992.10

(a) Exercice 97 Algèbre .

(b) Soit $(E) : xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$.

b1. i. Justifier l'existence de solutions de (E) développables en série entière.
ii. Soit J_0 une solution de (E) développable en série entière qui vérifie $J_0(0) = 1$.
Expliciter J_0. Quel est son ensemble de définition ?

b2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t$. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ \pi$.

b3. Montrer que $J_0(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.

On évitera d'être de mauvaise foi, mais on pourra faire observer à l'interrogateur que la fonction nulle est développable en série entière.
On suppose

$$\forall x \in]-r, r[\qquad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où $r > 0$. Alors y est solution de (E) sur $]-r, r[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-r, r[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\left[n + n(n-1)\right] a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

ou encore, en réindexant :

$$\forall x \in]-r,r[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} [n+1]^2\, a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0$$

ce qui équivaut, par unicité du développement en série entière (on a déjà utilisé le théorème de dérivation terme à terme des séries entières) à

$$a_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 1 \quad a_{n+1} = -\frac{a_{n-1}}{(n+1)^2}$$

ce qui donne, pour tout n impair, $a_n = 0$ et aussi

$$\forall p \geq 0 \qquad a_{2(p+1)} = -\frac{a_{2p}}{4(p+1)^2}$$

d'où par récurrence

$$\forall p \geq 0 \qquad a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2}a_0$$

Toutes ces séries entières ont un rayon de convergence infini (D'Alembert par exemple) et donnent donc des solutions sur $\mathbf{R}$. On a donc

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{2p}(p!)^2}x^{2p}$$

(b) : intégration par parties classique dans les intégrales de Wallis. Classique, mais à revoir, car demande quand même de ne pas s'y prendre n'importe comment.
Puis interversion série / intégrale, avec ici par exemple convergence normale sur un segment. Attention, la variable d'intégration n'est pas x, ne pas faire de confusion.

992.11

(a) Exercice 92 Algèbre .

(b) b1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^n}$ converge.

b2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x > 0$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{(x\ln(x))^n}{n!}$.

i. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et calculer sa somme.
ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur $]0,1]$.
iii. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.
iv. En déduire que la fonction $t \longmapsto t^t$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 t^t\mathrm{d}t$ sous forme d'une somme de série numérique (*indication : utiliser a)*).

(a) D'Alembert est bien adapté ici :

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(on fera observer que la série est à termes réels > 0).
(b) La somme de la série est $x \longmapsto x^x$. La fonction f_n se prolonge par continuité à $[0,1]$ entier (croissances comparées, en 0). Par parties, si $n \geq 1$:

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^n\right]_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

où l'on voit qu'il vaut mieux calculer

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^p \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^p\right]_0^1 - \frac{p}{n+1}\int_0^1 x^n (\ln x)^{p-1} \,\mathrm{d}x$$

d'où (récurrence sur p, n fixé) :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^p \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^p\ p!}{(n+1)^{p+1}}$$

et donc $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$. Il n'y a plus qu'à intervertir, l'hypothèse de convergence de $\sum N_1(f_n)$ étant donnée par le (a).

992.12

(a) Exercice 68 Algèbre .

(b) On pose, pour $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

b1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbf{R}^2$.

b2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.

b3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$?

La continuité sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ne pose pas de problème. En $(0,0)$ on passe en polaires. Pour la classe C^1, on calcule

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y(x^2+y^2) - 2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

puis $f(x,0) = 0$ partout donc, en regardant la dérivée en 0, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par opérations, puis en $(0,0)$ par passage en polaires.

De même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

La dernière question est délicate. A priori, on peut penser que la réponse est non. Le plus agréable serait d'espérer que le théorème de Schwarz tombe en défaut en 0…mais non, on vérifie que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

Il reste donc à trouver une dérivée partielle seconde qui ne soit pas continue en $(0,0)$, ce qui semble être le cas de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (calculs à vérifier).

992.13

(a) Exercice 92 Algèbre .

(b) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

On suppose que g est positive, nulle en-dehors de $[-a,\ a]$ avec $a > 0$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = n\,g(nt)$.

b1. i. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f * g_n)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g_n(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $f * g_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $f * g_n = g_n * f$.

ii. On pose $f_n = f * g_n$. Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

b2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
Indication : on pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

La bonne définition vient du fait qu'on intègre une fonction continue sur un segment.
Le changement de variable $t = x - u$ montre $f * g_n = g_n * f$.

$$(f * g_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} nf(x-t)g(nt)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u/n)g(u)\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} f(x-u/n)g(u)\mathrm{d}u$$

(changement de variable $t = u/n$). On applique alors le théorème de continuité avec domination sur tout segment. En effet, si K est un segment, la fonction $(x,u) \longmapsto f(x-nu)g(u)$ est continue sur $K \times [-a,a]$ compact (produit de compacts) donc bornée sur ce compact, et une domination par une constante convient.
On fixe x. On reprend l'expression $\int_{-a}^{a} f(x-u/n)g(u)\mathrm{d}u$. Pour la limite simple, c'est parfait. Pour la domination, il suffit de prendre une constante de nouveau : par exemple $N_\infty(g) \times N_\infty(f_[x-a, x+a]$.

992.14

(a) Exercice 85 Algèbre .

(b) On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{n(nx+1)}$.

b1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

b2. f est-elle continue sur $\mathbf{R}_+^*$?

b3. Trouver un équivalent de $f_n(x)$ puis de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b4. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de f au voisinage de 0^+.

La convergence simple se traite avec

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{xn^2}$$

Il y a convergence normale donc uniforme sur tout segment, et même sur tout $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ car

$$N_\infty\left(f_n|_{[a,+\infty[}\right) = f_n(a)$$

Et comme les f_n sont continues, f l'est. Quand $x \to +\infty$,

$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x}$$

Attention à ne pas sommer ces équivalents, ce n'est pas le contexte...Néanmoins,

$$xf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$$

avec $g_n(x) = \dfrac{x}{n(nx+1)}$. Etudions

$$g_n'(x) = \frac{n(nx+1) - xn^2}{(\dots)^2} \geq 0$$

et $g_n \geq 0$ donc $N_\infty\left(g_n|_{[1,+\infty[}\right) = 1/n^2$. Il y a convergence uniforme car normale, et donc on peut appliquer le théorème de la double limite :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n^2}$$

(on n'est pas censé connaître $\zeta(2)$, cela dit).
Pour la comparaison série/intégrale, on fixe x, on nomme

$$\phi\ :\ t \longmapsto \frac{1}{t(tx+1)}$$

dont on constate qu'elle st continue décroissante sur $[1,+\infty[$. Ce qui permet l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \frac{1}{x+1} + \int_1^{+\infty} \phi(t)\mathrm{d}t$$

L'intégrale se calcule de la manière suivante : on calcule $\displaystyle\int_1^A$, pour cela on décompose en éléments simples. Puis on prend la limite quand $A \to +\infty$.

992.15

(a) Exercice 59 Analyse .

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = h_n - \ln(n)$.

b1. Montrer que $u_{n+1} - u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b2. Étudier la convergence de $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

b3. Établir qu'il existe un réel γ tel que : $h_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b4. En déduire que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Un grand classique.

992.16

(a) Exercice 54 Analyse .

(b) b1. Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ et que $F \subset (F^\perp)^\perp$.

b2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire : $(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On pose : $F = \mathcal{C}^2([a,b], \mathbf{R})$.

i. Soit $f \in E$.
Montrer qu'il existe une unique fonction $g \in F$ telle que : $f = g''$ et $g(a) = g(b) = 0$.

ii. En déduire : $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$.

(a) est assez simple.
(b) Soit h tel que $h'' = f$ (existence assurée par le cours, existence d'une primitive pour toute fonction continue sur un intervalle). Alors les g tels que $g'' = f$ sont les

$$g\ :\ t \longmapsto h(t) + ut + v$$

Les conditions $g(a) = g(b) = 0$ équivalent alors au système $au + v = -h(a)$, $bu + v = -h(b)$, de déterminant $a - b$ au signe près (tout dépend de l'équation par laquelle on commence !) donc de Cramer, d'où l'existence et l'unicité.
Si $f \in F^\perp$, alors $(f|g) = 0$, or

$$(f|g) = \int_a^b g(t)g''(t)\mathrm{d}t = \left[g'(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b g'(t)^2\mathrm{d}t = -\int_a^b g'(t)^2\mathrm{d}t$$

On en déduit que g', par suite f, est nulle. Donc $F^\perp = \{0\}$ et $(F^\perp)^\perp = E$, donnant une inclusion stricte.
