992.1

(a) Exercice 34 Analyse .

(b) On considère l'application : $\forall (P,Q) \in (\mathbf{R}[X])^2, (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

b1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

b2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

b3. Calculer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t$.

992.2

(a) Exercice 74 Algèbre .

(b) Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-(nx)^2)$.

b1. Déterminer l'ensemble de définition de S.

b2. Étudier la continuité de S sur son domaine de définition.

b3. Calculer la limite de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b4. On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$ converge et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.
Déterminer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-(xt)^2\right) \mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

b5. En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

992.3

(a) Exercice 10 Analyse .

(b) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On définit l'application $\varphi : \mathbf{R}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ par :
$\forall P \in \mathbf{R}[X], \varphi(P) = P(u)$.

b1. En prenant $u = \mathrm{Id}_E$, calculer $\varphi(P)$.
Soit A une partie non vide de E. On introduit
$I = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \forall x \in A, P(u)(x) = 0_E\}$.

b2. Montrer que I est un idéal de $\mathbf{R}[X]$ non réduit au polynôme nul.
En déduire que $I = P_A(X)\mathbf{R}[X]$ avec $P_A(X)$ unitaire.

b3. On suppose que $A_1 \subset A_2$ avec A_1 et A_2 deux parties non vides de E.
Montrer que $P_{A_1}(X)$ divise $P_{A_2}(X)$.

b4. On pose $A = A_1 \cup A_2$ avec A_1 et A_2 deux parties non vides de E.
Montrer que $P_A(X) = \mathrm{PPCM}(P_{A_1}(X), P_{A_2}(X))$.

b5. On note $F = \mathrm{Vect}(A)$. Montrer que $P_A(X) = P_F(X)$.

992.4

(a) Exercice 99 Algèbre .

(b) b1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} \mathrm{d}x$.

b2. Démontrer le théorème utilisé à la question précédente.

992.5

(a) Exercice 95 Probabilités .

(b) Les questions $a)$ et $b)$ sont indépendantes.

b1. Soit f définie par : $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x^a}$ avec $a > 0$.

i. Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$ si $a \in]1, 3[$.

ii. On suppose $a \in]0, 1[$. En considérant la suite (u_n) définie par : $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\mathrm{d}x$, montrer que f n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

b2. Soit $\alpha > 0$.

i. Calculer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}}.$$

ii. Étudier la convergence de la série en $x = 1$ et $x = -1$.

992.6

(a) Exercice 80 Algèbre .

(b) On pose : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

b1. Montrer que ζ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.

b2. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et calculer ses dérivées sous forme de séries.

b3. Étudier les variations de ζ.

b4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.

b5. Donner un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1^+.

992.7

(a) Exercice 64 Algèbre .

(b) b1. Nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

b2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $n \geqslant 2$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{x\exp(-nx)}{\ln(n)}$.

i. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.

ii. Cette série de fonctions converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?

iii. Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Montrer la convergence uniforme de cette série sur $[a, b]$.

iv. Montrer la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ (*indication : utiliser le reste*).

992.8

(a) Exercice 51 Analyse .

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est une famille libre.

b1. Justifier que A est diagonalisable.

b2. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

b3. Que vaut $\det(A)$?

992.9

(a) Exercice 5 Analyse .

(b) Soit $n \geqslant 2$. On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On définit l'application trace : $\mathrm{Tr}\ :\ E \longrightarrow \mathbf{R}$.

b1. i. Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbf{R}$.
ii. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$?
iii. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(I_n)$ sont supplémentaires dans E.

b2. On pose $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par : $\forall M \in E, f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$.
Montrer que f est diagonalisable.

b3. Soit J une matrice non nulle de E telle que $\mathrm{Tr}(J) = 0$.
On pose $g : E \longrightarrow \mathbf{R}$ définie par : $\forall M \in E, g(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J$.
i. Montrer que $X^2 - 2X + 1$ est un polynôme annulateur de g.
ii. g est-il diagonalisable ?

992.10

(a) Exercice 97 Algèbre .

(b) Soit $(E) : xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$.

b1. i. Justifier l'existence de solutions de (E) développables en série entière.
ii. Soit J_0 une solution de (E) développable en série entière qui vérifie $J_0(0) = 1$.
Expliciter J_0. Quel est son ensemble de définition ?

b2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t$. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}, I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\ \pi$.

b3. Montrer que $J_0(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$.

992.11

(a) Exercice 92 Algèbre .

(b) b1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^n}$ converge.

b2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x > 0$, on pose : $f_n(x) = \dfrac{(x\ln(x))^n}{n!}$.
i. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et calculer sa somme.
ii. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur $]0, 1]$.
iii. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.
iv. En déduire que la fonction $t \longmapsto t^t$ est intégrable sur $]0, 1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 t^t\mathrm{d}t$ sous forme d'une somme de série numérique (*indication : utiliser a)*).

992.12

(a) Exercice 68 Algèbre .

(b) On pose, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = \dfrac{x^3y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

b1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbf{R}^2$.
b2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$.
b3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$?

992.13

(a) Exercice 92 Algèbre .

(b) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues.

On suppose que g est positive, nulle en-dehors de $[-a,\ a]$ avec $a > 0$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g_n(t) = n\,g(nt)$.

b1. i. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f * g_n)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g_n(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $f * g_n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que $f * g_n = g_n * f$.

ii. On pose $f_n = f * g_n$. Montrer que f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

b2. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.

Indication : on pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

992.14

(a) Exercice 85 Algèbre .

(b) On pose, pour $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \dfrac{1}{n(nx+1)}$.

b1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

b2. f est-elle continue sur $\mathbf{R}_+^*$?

b3. Trouver un équivalent de $f_n(x)$ puis de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

b4. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de f au voisinage de 0^+.

992.15

(a) Exercice 59 Analyse .

(b) On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = h_n - \ln(n)$.

b1. Montrer que $u_{n+1} - u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

b2. Étudier la convergence de $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

b3. Établir qu'il existe un réel γ tel que : $h_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b4. En déduire que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

992.16

(a) Exercice 54 Analyse .

(b) b1. Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$ et que $F \subset (F^\perp)^\perp$.

b2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On considère $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire : $(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$. On pose : $F = \mathcal{C}^2([a,b], \mathbf{R})$.

i. Soit $f \in E$.
Montrer qu'il existe une unique fonction $g \in F$ telle que : $f = g''$ et $g(a) = g(b) = 0$.

ii. En déduire : $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$.