991.1

(a) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

(b) Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nature et éléments caractéristiques de l'endomorphisme u.

---

1. On définit $\phi_n \ : \ x \longmapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{x} \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$. On étudie sur $\mathbf{R}_*^+$, sur quoi l'on peut utiliser le théorème sur les séries alternées. Ce qui conduit à la majoration du reste

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Il y a donc convergence uniforme sur $]0,+\infty[$. Et on peut appliquer le théorème de la double limite, qui donne une limite en 0 égale à $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. Reste à calculer cette somme de série, en « poussant » le DSE de $\ln(1+x)$ jusqu'à 1 (théorème sur les séries alternées, encore).

2. On munit $\mathbf{R}^3$ de la structure euclidienne canonique. La matrice A est orthogonale (se demander à quoi rimerait ce 1/3, sinon…). C'est une matrice de rotation (le produit vectoriel, hors-programme, des deux premières colonnes vaut la troisième et non pas l'opposé de la troisième). On cherche l'axe. En résolvant $AX = X$. On cherche l'angle. Soit α une mesure de cet angle, $2\cos\alpha + 1 = -1$, donc $\cos\alpha = -1$, donc l'angle est π modulo 2π, il s'agit donc d'un demi-tour. On vérifie accessoirement que $A^2 = \mathrm{Id}$.
Solution stupide : en voyant la matrice, j'avais remarqué qu'elle était symétrique réelle…puis oublié ce point en me concentrant sur l'isométrie vectorielle. Une isométrie vectorielle qui est de plus symétrique, c'est une symétrie orthogonale. Il n'y a plus qu'à déterminer les invariants (et on n'a pas besoin du produit vectoriel, ni du déterminant d'ailleurs).

991.2

(a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère deux parties P_1 et P_2 de $[\![1,n]\!]$ choisies indépendamment et aléatoirement.

a1. Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(i \in P_1) = \dfrac{1}{2}$.

a2. Soient i et j dans $[\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$. Montrer que les événements $\{i \in P_1\}$ et $\{j \in P_1\}$ sont indépendants.

a3. Trouver les lois de $X = |P_1 \cup P_2|$ et de $Y = |P_1 \cap P_2|$.

(b) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} & = & u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n - w_n \end{array}\right. .$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0, v_0 et w_0 pour que les trois suites convergent.

---

1. (a) On suppose implicitement une probabilité uniforme sur $\mathcal{P}(\llbracket 1, n\rrbracket)$. Le nombre de parties qui contiennent i est égal au nombre de parties qui ne contiennent pas i (on voit facilement que chacun de ces nombres vaut 2^{n-1}, mais on peut aussi utiliser la bijection $A \longmapsto A\cup\{i\}$ de l'ensemble des parties qui ne contiennent pas i sur l'ensemble des parties qui contiennent i). D'où le résultat.

   (b) De la même façon que dans (a) on montre que $P(i\in P_1, j\in P_1) = 1/4$ (il y a 2^{n-2} parties qui contiennent $\{i,j\}$), d'où l'indépendance.

   (c) On a $Y = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{P_1\cap P_2}(i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{P_1}(i)\mathbf{1}_{P_2}(i)$. Chaque $\mathbf{1}_{P_1}(i)\mathbf{1}_{P_2}(i)$ suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/4)$, par (a) et indépendance de P_1 et P_2. Si ces $\mathbf{1}_{P_1}(i)\mathbf{1}_{P_2}(i)$ sont mutuellement indépendantes, alors la loi de Y est une loi binomiale $\mathcal{B}(n,1/4)$. La mutuelle indépendance demande de raffiner le (b), peut-être l'interrogateur sera déjà très content si on sait dire que la mutuelle indépendance est plus forte que l'indépendance 2 à 2.

2. On écrit $U_{n+1} = AU_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$. On calcule $P_A = (X+1)(X^2-X-4)$. Les 3 valeurs propres sont -1, α, β où $|\alpha|>1$ et $|\beta|>1$. On a $U_n = A^nU_0$ et si on orthodiagonalise $A = PDP^{-1} = PDP^T$, $V_n = D^nV_0$ avec $V_n = P^TU_n$. Il y a convergence si et seulement si $u_0 = v_0 = w_0 = 0$...un peu décevant, calculs à vérifier !

991.3

(a) On considère $S\in\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. On suppose que S admet n valeurs propres strictement positives deux à deux distinctes. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme euclidienne.

Pour $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul, on pose : $\forall k\in\mathbf{N}^*, Y_k = \dfrac{S^kX}{\| S^kX \|}$.

Montrer que la suite $(Y_k)_{k\geqslant 1}$ converge vers un vecteur propre de S.

(b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles.

Justifier l'existence d'une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ et telle que la suite (P_n') converge uniformément vers f' sur $[a,b]$.

---

1. On a $S = PDP^T = PDP^{-1}$ avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n>0$. On a $S^kX = PD^kP^{-1}X = PD^kZ$ avec $Z = P^{-1}X$. Alors, P étant orthogonale,

$$Y_k = \frac{PD^kZ}{\|D^kZ\|} = P\left(\frac{1}{\|D^kZ\|}D^kZ\right)$$

Soit i_0 le plus petit indice pour lequel $z_{i_0}\neq 0$. Alors

$$\|D^kZ\| \underset{k\to+\infty}{\sim} \lambda_{i_0}^k|z_{i_0}|$$

et donc $Y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \pm PE_{i_0}$ (où l'on note comme d'habitude E_{i_0} le $i_0$ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On obtient bien au signe près une colonne de P donc un vecteur propre.

2. On prend une suite (Q_n) de polynômes qui converge uniformément vers f' sur $[a,b]$ (Weierstrass). La transmission de la convergence uniforme sur tout segment à la suite des primitives s'annulant en un point donné conclut alors assez vite.

991.4

b1. Soit $A \in \mathcal{O}(n)$. On note $A = (a_{i,j})$.
Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right| \leqslant n$. Étudier les cas d'égalité.

b2. *Enoncé probablement erroné*
On pose : $f(x) = \int_1^2 \exp(-(t^2 + (t/x)^2))\mathrm{d}t$.

i. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
ii. f est-elle continue sur D ? de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ?
iii. Calculer f' là où elle est définie.
iv. Déterminer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

(a) Il n'est pas initéressant d'avoir remarqué que $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = U^T AU$ où $U = (1 \dots 1)^T$ (U est une colonne). Reste à interpréter cela comme $(U|AU)$ (produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$) et à utiliser Cauchy-Schwarz et l'orthogonalité de A. L'égalité dans Cauchy-Schwarz a lieu si et seulement si U est vecteur propre de A, i.e. $AU = \pm U$.

(b) La domination par e^{-t^2} donne la définition et la continuité sur $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
Pour la classe C^1 il s'agit de dominer

$$\exp(-t^2) \times \frac{2t^2}{x^3} \exp(-t^2/x^2)$$

et la domination par $\exp(-t^2) \times \dfrac{2t^2}{a^3}$ pour $x \in [a, +\infty[$, $a > 0$, convient, or f est paire. Pour le calcul, ça s'avère peu convaincant. Les bornes ne sont sûrement pas les bonnes, la fonction non plus, sans doute !

991.5

(a) Soit $E = \mathbf{R}^3$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$.

a1. Montrer que u n'est pas bijectif.
a2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
a3. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.
a4. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u^2 + \mathrm{Id}_E)$.
a5. On suppose que u n'est pas l'application nulle. Montrer que $\mathrm{rg}(u) = 2$ et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est égale à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) En discutant suivant $\alpha \in \mathbf{R}$, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

---

1. Si u est bijectif, $X^2 + 1$ annule u qui n'a alors pas de valeur propre, or on est en dimension impaire, contradiction.
Si $x = u(y)$ et $u(x) = 0_E$ alors $u^2(y) = 0_E$ donc $u^3(y) = 0_E$,donc $u(y) = 0_E$. On a l'intersection nulle, le théorème du rang fait le reste.

$u\circ(u^2+\mathrm{Id}_E)=0$ donne $\mathrm{Im}(u^2+\mathrm{Id}_E)\subset \mathrm{Ker}(u)$. Et par théorème des noyaux, $\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_E)=E$. Avec le théorème du rang on en tire que $\mathrm{Im}(u^2+\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ ont même dimension. Ce qui conclut à l'égalité du (c).
Le (d) se traite de la même manière.
Comme u n'est pas un automorphisme, s'il est supposé non nul alors $\mathrm{rg}(u)\in\{1,2\}$. Si $\mathrm{rg}(u)=1$ alors $F=\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1, stable par u, u induirait sur F une homothétie sans valeur propre, ce serait étrange. On prend une base adaptée à $E=\mathrm{Ker}(u)\oplus\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_E)$, pour la base de $\mathrm{Ker}(u^2+\mathrm{Id}_E)$ on fixe $x\neq 0_E$ dans F et on prend $(x,u(x))$.

2. On fait un développement asymptotique à deux termes, on conclut qu'il y a convergence si et seulement si $\alpha>1/2$. Attention à ne pas prendre un équivalent…c'est l'assurance d'un résultat très faux et d'une note ici très basse.

991.6

(a) a1. Énoncer le théorème sur la continuité des suites de fonctions.

a2. À partir de l'inégalité :

$$\forall x\in I, |U(x)-U(a)|\leqslant |U(x)-U_n(x)|+|U_n(x)-U_n(a)|+|U_n(a)-U(a)|,$$

démontrer le théorème précédent.

a3. On pose : $\forall n\in\mathbf{N}, f_n(x)=(\sin(x))^n$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

(b) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^4=A$.

b1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbf{C}$?

b2. Montrer que $\mathrm{Tr}(A)$ est un entier.

---

1. Du cours. Pour (c) la réponse est oui, ce serait non sur $[0,\pi/2]$.

2. X^4-X est scindé à racines simples sur $\mathbf{C}$, donc A est bien diagonalisable, semblable à une matrice dont la diagonale est composée de n_1 termes nuls, n_2 termes égaux à 1, n_3 termes égaux à j et n_4 termes égaux à j^2, avec $n_3=n_4$ car la matrice est réelle, donc j et j^2 sont racines de son polynôme caractéristique avec même multiplicité. Or $n_3(j+j^2)=-n_3$, d'où le (b).

991.7

(a) a1. Donner la définition d'une loi de Poisson et un exemple d'utilisation.

a2. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

a3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Calculer la loi de $X+Y$.

(b) Soit $A=\begin{pmatrix} 9 & -10 & 0\\ 5 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

b1. Calculer le spectre de A.

b2. Déterminer le polynôme minimal de A, puis l'ensemble des polynômes annulateurs de A.

b3. Montrer que A est diagonalisable.

b4. Calculer A^p pour tout $p\in\mathbf{N}$.

b5. Rappeler la définition de $\exp(A)$ et la calculer.

1. Pour le (a), revoir le cours. Pour le (c), on n'est pas obligé d'utiliser la fonction génératrice, on peut aussi faire le calcul direct.

2. $9-10=5-6=-1$ (on se croirait aux CCP !) donc $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est vecteur propre, valeur propre associée -1. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est aussi vecteur propre, valeur propre associée -1. De toute manière, la réduction de A se ramène à celle de la matrice $\begin{pmatrix}9 & -10\\5 & -6\end{pmatrix}$. On trouve que 4 est valeur propre. Un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Donc les valeurs propres sont $-1,-1,4$, il y a un sous-espace propre de dimension 2 pour -1 donc A est diagonalisable, son polynôme minimal est donc $(X+1)(X-4)$, les polynômes annulateurs s'en déduisent, le calcul des puissances et de l'exponentielle de A se fait en diagonalisant.

991.8

(a) a1. Rappeler les définitions d'un convexe et d'un connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$. Quel lien peut-on faire entre ces deux notions ?

a2. Soit $H=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2-y^2=1\}$. H est-il fermé ? borné ?

a3. On considère S la sphère unité de $\mathbf{R}^2$ et f une application continue de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.
Montrer que $f(S)$ est un segment.

(b) Soit $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\-3 & 4 & -3\\-4 & 4 & -4\end{pmatrix}$. On cherche à calculer A^p de différentes façons.

b1. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b2. Calculer $A\times(1\ 1\ 0)^T$. En déduire le spectre de A.

b3. Donner le polynôme minimal de A.

b4. Proposer deux méthodes pour calculer A^p où $p\in\mathbf{N}^*$ (on détaillera chacune des deux méthodes).

b5. Calculer A^p avec l'une de ces méthodes.

---

1. H est fermé (l'application $(x,y)\mapsto x^2-y^2$ est continue), non borné. La sphère unité est compacte et connexe par arcs (pour ce dernier point, il faut savoir ce que veut l'examinateur. Si c'est la sphère euclidienne, il suffit de la faire apparaître comme image par $\theta\longmapsto(\cos\theta,\sin\theta)$, continue, du segment $[0,2\pi]$ connexe par arcs. Sinon, on utilise la preuve générale du fait qu'une sphère unité est connexe par arcs : on joint x à y par l'arc
$$t\longmapsto\frac{1}{\|(1-t)x+ty\|}\left((1-t)x+ty\right)$$
ça ne marche pas si et seulement si il existe t tel que $(1-t)x+ty=0$ ce qui équivaut à $x=-y$ (on a $\|x\|=\|y\|=1$). Si $x=-y$, on prend $z\in S\setminus\{x,y\}$, et on joint x à z puis z à y). Donc $f(S)$ est compact et connexe par arcs. Dans $\mathbf{R}$, cela signifie que $f(S)$ est un intervalle compact, un segment, donc.

2. On résout $AX=0$, on trouve que 0 est valeur propre, le sous-espace propre associé est de dimension 1 engendré par $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. La suggestion de l'énoncé amène à voir que 1 est valeur propre. Avec la trace, le polynôme caractéristique étant nécessairement scindé (puisqu'il y a déjà deux racines), on trouve enfin

que -2 est valeur propre. On peut donc diagonaliser pour calculer A^p, mais le mieux est de considérer le polynôme minimal $\pi_A = X(X-1)(X+2)$, de diviser

$$X^p = \pi_A Q_p + R_p$$

où on aura intérêt à écrire $R_p = \alpha X(X-1) + \beta X(X+2) + \gamma(X-1)(X+2)$ pour déterminer α, β, γ en évaluant en $0, 1, -2$. On a alors $A^p = R_p(A)$.