

991.1

- (a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$.
- (b) Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nature et éléments caractéristiques de l'endomorphisme u .

991.2

- (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère deux parties P_1 et P_2 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ choisies indépendamment et aléatoirement.
- a1. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(i \in P_1) = \frac{1}{2}$.
 - a2. Soient i et j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$. Montrer que les événements $\{i \in P_1\}$ et $\{j \in P_1\}$ sont indépendants.
 - a3. Trouver les lois de $X = |P_1 \cup P_2|$ et de $Y = |P_1 \cap P_2|$.
- (b) Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n \end{cases}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur u_0, v_0 et w_0 pour que les trois suites convergent.

991.3

- (a) On considère $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. On suppose que S admet n valeurs propres strictement positives deux à deux distinctes. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme euclidienne.
- Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul, on pose : $\forall k \in \mathbf{N}^*, Y_k = \frac{S^k X}{\|S^k X\|}$.
- Montrer que la suite $(Y_k)_{k \geq 1}$ converge vers un vecteur propre de S .
- (b) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles.
- Justifier l'existence d'une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$ et telle que la suite (P'_n) converge uniformément vers f' sur $[a, b]$.

991.4

- (a) Soit $A \in \mathcal{O}(n)$. On note $A = (a_{i,j})$.
- Montrer que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| \leq n$. Étudier les cas d'égalité.
- (b) On pose : $f(x) = \int_1^2 \exp(-(t^2 + (t/x)^2)) dt$.
- b1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
 - b2. f est-elle continue sur D ? de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ?
 - b3. Calculer f' là où elle est définie.

b4. Déterminer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

991.5

(a) Soit $E = \mathbf{R}^3$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$.

a1. Montrer que u n'est pas bijectif.

a2. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.

a3. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u^2 + \text{Id}_E)$.

a4. Montrer que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2 + \text{Id}_E)$.

a5. On suppose que u n'est pas l'application nulle. Montrer que $\text{rg}(u) = 2$ et qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice représentative de u est égale à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) En discutant suivant $\alpha \in \mathbf{R}$, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$

991.6

(a) a1. Énoncer le théorème sur la continuité des suites de fonctions.

a2. À partir de l'inégalité :

$$\forall x \in I, |U(x) - U(a)| \leq |U(x) - U_n(x)| + |U_n(x) - U_n(a)| + |U_n(a) - U(a)|,$$

démontrer le théorème précédent.

a3. On pose : $\forall n \in \mathbf{N}, f_n(x) = (\sin(x))^n$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^4 = A$.

b1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbf{C}$?

b2. Montrer que $\text{Tr}(A)$ est un entier.

991.7

(a) a1. Donner la définition d'une loi de Poisson et un exemple d'utilisation.

a2. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ .

a3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ . Calculer la loi de $X + Y$.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b1. Calculer le spectre de A .

b2. Déterminer le polynôme minimal de A , puis l'ensemble des polynômes annulateurs de A .

b3. Montrer que A est diagonalisable.

b4. Calculer A^p pour tout $p \in \mathbf{N}$.

b5. Rappeler la définition de $\exp(A)$ et la calculer.

991.8

- (a) a1. Rappeler les définitions d'un convexe et d'un connexe par arcs de $\mathbf{R}^2$. Quel lien peut-on faire entre ces deux notions ?
- a2. Soit $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$. H est-il fermé ? borné ?
- a3. On considère S la sphère unité de $\mathbf{R}^2$ et f une application continue de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $f(S)$ est un segment.
- (b) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. On cherche à calculer A^p de différentes façons.
- b1. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- b2. Calculer $A \times (1 \ 1 \ 0)^T$. En déduire le spectre de A .
- b3. Donner le polynôme minimal de A .
- b4. Proposer deux méthodes pour calculer A^p où $p \in \mathbf{N}^*$ (on détaillera chacune des deux méthodes).
- b5. Calculer A^p avec l'une de ces méthodes.