Loi forte des grands nombres

(a) On note $X'_n = X_n - \mu$.

Alors $E(X'_n) = E(X_n) - \mu = 0$

et $V(X'_n) = V(X_n) = \sigma^2$

La suite $(X'_n)_n$ est une suite i.i.d.

Et $S'_n = \frac{1}{n}(X'_1 + \dots + X'_n)$

$= S_n - \mu$

Donc il s'agit de montrer que $P(S'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0) = 1$

<u>On peut donc supposer $\mu = 0$</u> quitte à remplacer X_n par $X_n - \mu$

(b) $V(S_n) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \dots + X_n)$

$= \frac{1}{n} V(X)$ par indépendance

$= \frac{\sigma^2}{n}$

donc, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}$$

ie $\underline{P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}}$ car $E(S_n) = 0$

<u>Rmq</u> : $(|S_n| > \varepsilon) \subset (|S_n| \leq \varepsilon)$

donc on a aussi $P(|S_n| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

(c) $\forall \varepsilon > 0, \qquad P(|S_{m^2}| > \varepsilon) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{m^2 \varepsilon^2}$

t.g. d'une série convergente

donc $\sum_m P(|S_{m^2}| > \varepsilon)$ est une série convergente.

D'après l'exercice précédent (conséquence de Borel-Cantelli),

<u>$(S_{m^2})_m$ converge presque sûrement vers 0</u>

(d) • Comme les X_k sont centrées, $E(T_n) = 0$ par linéarité.

• On calcule : $V(T_n) = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=m^2+1}^{n} V(X_k)$ par indépendance

$$= \frac{n - m^2}{n^2} \sigma^2$$

• Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|T_n - E(T_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$$

ie $\quad P(|T_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{n - m^2}{n^2 \varepsilon^2} \sigma^2$

Mais $\qquad m \leqslant \sqrt{n} < m+1$

donc $\quad m^2 \leqslant n < (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$

et, comme ce sont des entiers, $n \leqslant m^2 + 2m$

puis $\quad n - m^2 \leqslant n - (n - 2m) = 2m \leqslant 2\sqrt{n}$

Il reste $\quad \underline{P(|T_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{2\sigma^2}{n^{3/2} \varepsilon^2}}$

Ici encore, $P(|T_n| > \varepsilon) \leqslant P(|T_n| \geqslant \varepsilon)$

(e) • Comme $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge,

$\forall \varepsilon > 0$, $\sum P(|T_n| > \varepsilon)$ converge

et donc par l'ex. précédent, $(T_n)_n$ converge presque sûrement vers 0.

• On a donc établi :

$$A = \left(S_{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right) \quad \text{est presque sûr}$$

$$B = \left(T_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right) \quad \text{est presque sûr.}$$

et donc $A \cap B$ est presque sûr.

• Vérifions alors que $A \cap B \subset \left(S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right)$:

Soit $\omega \in A \cap B$ ie $S_{m^2}(\omega) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$ et $T_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On a alors :

$$|S_n(\omega)| = \left| \frac{1}{n} \left(X_1(\omega) + \dots + X_{m^2}(\omega) + X_{m^2+1}(\omega) + \dots + X_n(\omega) \right) \right|$$

où $m = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$

$$= \left| \frac{m^2}{n} S_{m^2}(\omega) + T_n(\omega) \right|$$

$$\leq 1 . |S_{m^2}(\omega)| + |T_n(\omega)|$$

car $m^2 \leq n$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On a donc $\underset{\text{presque sûr}}{A \cap B} \subset \left(S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right)$

donc $\underline{P\left(S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \right) = 1}$.