Convergence p.s vs convergence en proba.

(a) Notons $A = \{\omega \in \Omega$ t.q. $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to+\infty]{} X(\omega)\}$

On a :

$\omega \in A \iff \forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N \quad |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \varepsilon$

donc $A = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{n\geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon)$

Mais ce n'est pas une intersection dénombrable d'événements.

Reprenons :

$\omega\in A \iff \forall p \in \mathbb{N}^*, \exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\geq N \quad |X_n(\omega)-X(\omega)| \leq \frac{1}{p}$

En effet : $|\Leftarrow|$ à ε fixé, on applique ceci avec $\frac{1}{p} \leq \varepsilon$

$|\Rightarrow|$ à p fixé, on applique pour ε tq $0<\varepsilon\leq \frac{1}{p}$

Ainsi

$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq N}\left(|X_n-X|\leq \frac{1}{p}\right)$$

Comme $|X_n - X|$ est une va, $\left(|X_n-X|\leq \frac{1}{p}\right)$ est un événement, et A est intersection dénombrable d'union dénombrable d'intersection dénombrable d'événements.

$$\underline{A\in\mathcal{A}}$$

(b) On suppose que $P(X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X) = 1$, ie $P(A) = 1$

défini en (a)

Soit $\varepsilon > 0$.

$\left(\bigcap_{n \geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \right)_N$ est une suite croissante d'événements

donc, par continuité croissante,

$$P\left(\bigcap_{n\geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon)\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \right) = 1$$

car $A \subset \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon)$

et $P(A) = 1$ par hyp.

On a :

$$\bigcap_{n\geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon) \subset (|X_N - X| \leq \varepsilon)$$

et donc

$$\underbrace{P\left(\bigcap_{n\geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon)\right)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1} \leq P(|X_N - X| \leq \varepsilon) \leq 1$$

donc par encadrement $P(|X_N - X| \leq \varepsilon) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$.

En passant au contraire,

$$P(|X_N - X| > \varepsilon) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

ie <u>$(X_n)_n$ converge vers X en probabilité.</u>

(c) On suppose, pour tout $\varepsilon>0$, que $\sum_n P(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge.

Par le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que

$$P\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq N} (|X_n - X| > \varepsilon)\right) = 0$$

et donc, en passant au contraire :

$$P\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} (|X_n - X| \leq \varepsilon)\right) = 1$$

$$\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \left(|X_n - X| \leq \frac{1}{p}\right)\right)_p$$ est une suite décroissante

d'événements, donc par continuité décroissante :

$$\underbrace{P\left(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \left(|X_n - X| \leq \frac{1}{p}\right)\right)}_{\text{vaut } 1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} P\left(\underbrace{\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N}}_{\text{c'est } A} \left(|X_n - X| \leq \frac{1}{p}\right)\right)$$

et donc $P(A) = 1$

i.e. <u>$(X_n)_n$ cv presque sûrement vers X</u>.

(d) On suppose que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers X.

- Construisons une extractrice par récurrence :
  - On pose $\varphi(1)=1$
  - On suppose définis $\varphi(1),\dots,\varphi(n)$ tq

$$\varphi(1)<\dots<\varphi(n)$$

$$\forall k,\quad P\left(|X_{\varphi(k)}-X|\geq \frac{1}{k}\right)\leq \frac{1}{k^2}$$

Par hypothèse avec $\varepsilon=\frac{1}{n+1}$,

$$P\left(|X_n-X|>\frac{1}{n+1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Par déf de la limite avec $\varepsilon=\frac{1}{(n+1)^2}$,

$$\exists N \text{ tq } \forall n\geq N,\quad P\left(|X_n-X|\geq\frac{1}{n+1}\right)\leq\frac{1}{(n+1)^2}$$

On choisit $\varphi(n+1)\geq \mathrm{Max}(N,\varphi(n)+1)$,

de sorte que $\begin{cases}\varphi(n+1)>\varphi(n)\\ P\left(|X_{\varphi(n+1)}-X|\geq\frac{1}{n+1}\right)\leq\frac{1}{(n+1)^2}\end{cases}$

- Pour $\varepsilon>0$, il existe n_0 tq $\forall n\geq n_0$ $\frac{1}{n}\leq\varepsilon$, et donc

$$P(|X_{\varphi(n)}-X|\geq\varepsilon)\leq P\left(|X_{\varphi(n)}-X|\geq\frac{1}{n}\right)$$

$$\leq\frac{1}{n^2}\quad \text{tq série convergente}$$

donc $\sum_{n\geq n_0} P(|X_{\varphi(n)}-X|\geq\varepsilon)$ converge

donc $\sum_{n\geq 1} P(|X_{\varphi(n)}-X|\geq\varepsilon)$ converge.

Par (b), $(X_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers X.