$$P(X=i, Y=j) = \frac{a}{i!\,j!} \qquad i,j \in \mathbb{N}$$

(a) $(P(X=i, Y=j))_{i,j}$ est une distribution de probabilités,

donc : $\quad * \ \forall i,j \quad \frac{a}{i!\,j!} \geq 0 \quad$ ie $\quad a \geq 0$

$$* \ \sum_{i,j} \frac{a}{i!\,j!} = 1$$

Or, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[ \cup \{+\infty\}$,

$$\sum_{i,j} \frac{a}{i!\,j!} = a \sum_{i=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \frac{1}{j!} \right) \qquad \text{(Fubini positif)}$$

$$= a \sum_{i=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{i!} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \right) \right)$$

$$= a \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \right) \left( \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \right)$$

$$= a \cdot e^1 \cdot e^1$$

$$= a e^2$$

$< +\infty$ donc l'égalité est valable dans $[0,+\infty[$.

Et donc $\underline{a = e^{-2}}$

(b) On cherche les lois de $X$ et $Y$, c'est-à-dire les lois marginales du couple $(X, Y)$

Pour $i \in \mathbb{N}$ :

$$P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-2} \frac{1}{i!\, j!}$$

$$= \frac{e^{-2}}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!}$$

$$= \frac{e^{-2}}{i!} e^{1}$$

$$= \underline{\frac{e^{-1}}{i!}}$$

De façon symétrique, pour $j \in \mathbb{N}$, $\underline{P(Y=j) = \frac{e^{-1}}{j!}}$

On peut remarquer que $\underline{X \sim Y \sim \mathcal{P}(1)}$

Par suite, $\underline{E(X) = E(Y) = 1}$

L'énoncé demande cependant de calculer l'espérance.

On calcule, dans $[0,+\infty] = [0,+\infty[ \cup \{+\infty\}$ car $X$ à valeurs $\geq 0$ :

$$E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i\, P(X=i) = 0 + \sum_{i=1}^{+\infty} i\, e^{-1} \frac{1}{i!}$$

$$= e^{-1} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{(i-1)!}$$

$$= e^{-1} e^{1}$$

$$= 1 < +\infty$$

(c) Pour tout $i, j \in \mathbb{N}$,

$$P(X=i, Y=j) = \frac{e^{-2}}{i!\, j!}$$
$$= \frac{e^{-1}}{i!} \times \frac{e^{-1}}{j!}$$
$$= P(X=i)\, P(Y=j)$$

donc <u>$X$ et $Y$ sont indépendantes</u>

(d) $Z = X + Y$ et $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$

donc $Z(\Omega) = \mathbb{N}$

Pour $k \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$P(Z=k) = P(X+Y=k)$$
$$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X+Y=k, X=i)$$
$$= \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i, Y=k-i)$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-2}}{i!(k-i)!} + 0$$

pour $i > k$, $k-i < 0$
donc $(Y = k-i)$ est impossible

$$= \frac{e^{-2}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}$$
$$= \underline{\frac{e^{-2}}{k!} 2^k}$$

On remarque que <u>$Z \sim \mathcal{P}(2)$</u>

Par linéarité de l'espérance, $E(Z) = E(X) + E(Y)$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$