- On note X la va du rang d'obtention du premier pile. Comme la pièce est équilibrée et que l'on suppose les lancers indépendants, $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$

- On note Y la va donnant la valeur du dé lancé. On cherche la loi de Y

  * $Y(\Omega) = [\![1, 6]\!]$

  * Calculons pour commencer:

$$P(Y=6) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=6 \mid X=n)\, P(X=n)$$

par les probas totales, avec le système complet $(X=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Sachant $(X=n)$, l'urne contient le dé initial, ainsi que les $(n-1)$ dés qui ont été ajoutés. On note A l'événement « le dé est pipé » et $\bar{A}$ l'événement « le dé est équilibré ». Par les probas totales à la proba $P_{(X=n)}$:

$$P_{(X=n)}(Y=6) = P_{(X=n)}(Y=6 \mid A)\, P_{(X=n)}(A) + P_{(X=n)}(Y=6 \mid \bar{A})\, P_{(X=n)}(\bar{A})$$

$$= 1 \times \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \times \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{n+5}{6n}$$

Il reste:

$$P(Y=6) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{6n} P(X=n)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{2^n} \qquad \text{car } \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) \qquad \text{car } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \text{ pour } x \in]-1,1[$$

$$= \frac{1}{6}(1 + 5\ln 2)$$

* De même, pour $k = 1, \dots, 5$:

$$P(Y=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Y=k \mid X=n) P(X=n)$$

avec $P(Y=k \mid X=n) = 0 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \cdot \frac{n-1}{n}$

$$= \frac{n-1}{6n}$$

donc $P(Y=k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{6n} P(X=n)$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{6}(1 - \ln 2)$$