On note B_i = « lors du tirage i, la boule est blanche »

N_i = « " , la boule est noire » $= \overline{B_i}$

On a, par hypothèse : $P(B_i) = p$ et $P(N_i) = 1-p$ noté q

et on suppose les tirages indépendants.

(a) • On commence par déterminer la loi conjointe de (X,Y)

$*$ $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

$*$ Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On a :

$$(X=i) \cap (Y=j) = (B_1 \cap \dots \cap B_i \cap N_{i+1} \cap \dots \cap N_{i+j} \cap B_{i+j+1})$$
$$\cup (N_1 \cap \dots \cap N_i \cap B_{i+1} \cap \dots \cap B_{i+j} \cap N_{i+j+1})$$

donc $P(X=i, Y=j) = p^i q^j p + q^i p^j q$

car l'union est disjointe, et les tirages indépendants

$$= \underline{p^{i+1} q^j + p^j q^{i+1}}$$

• On détermine alors la loi de $(X+Y)$:

$*$ $(X+Y)(\Omega) = [\![2, +\infty[\![$

$*$ Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$

On conditionne par X : $(X=i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet

d'événements, donc

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X+Y=k, X=i)$$
$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y=k-i, X=i)$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i, Y=k-i)$$

car $Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} p^{i+1} q^{k-i} + p^{k-i} q^{i+1}$$

On distingue alors deux cas :

* Si $p=q=\frac{1}{2}$

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \times 2$$
$$= (k-1)\frac{1}{2^k}$$

* Si $p \neq \frac{1}{2}$, $\frac{p}{q} \neq 1$

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} p q^k \left(\frac{p}{q}\right)^i + \sum_{i=1}^{k-1} p^k q \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

$$= p^2 q^{k-1} \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}}{1-\frac{p}{q}} + p^{k-1} q^2 \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}}{1-\frac{q}{p}}$$

comme sommes géométriques

$$= p^2 q \, \frac{q^{k-1} - p^{k-1}}{q - p} + p q^2 \, \frac{p^{k-1} - q^{k-1}}{p - q}$$

$$= pq \, \frac{q^{k-1} - p^{k-1}}{q - p} (p + q)$$

(b) Comme précédemment :

$$P(X = Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = Y, X = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y = i)$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} p^i q^i \underbrace{(p + q)}_{1}$$

somme géométrique
$0 < pq < 1$

$$= pq \, \frac{1}{1 - pq}$$