

Soit B un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que l'ensemble des événements indépendants de B forment une tribu sur Ω .

On note $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A}, A, B \text{ indépendants}\}$

- $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

- Montrer $\Omega \in \mathcal{B}$:

$$P(\Omega \cap B) = P(B)$$

$$= 1 \cdot P(B)$$

$$= P(\Omega) P(B)$$

donc Ω et B indépendants

- Soit $A \in \mathcal{B}$. Montrer $\bar{A} \in \mathcal{B}$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{car } B = (A \cap B) \underset{\text{disj}}{\cup} (\bar{A} \cap B)$$

$$= P(B) - P(A)P(B) \quad \text{car } A, B \text{ indépendants}$$

$$= (1 - P(A)) P(B)$$

$$= P(\bar{A}) P(B)$$

donc $\bar{A}$ et B sont indépendants

- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite d'événements indépendants de $\mathcal{B}$, disjoints. (*)

Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ indépendant de $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
 P\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap B\right) &= P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B)\right) \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n \cap B) \quad \text{par } \sigma\text{-additivité} \\
 &\quad \text{car l'union est disjointe} \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) P(B) \\
 &\quad \text{par indépendance} \\
 &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n)\right) P(B) \\
 &= P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) P(B)
 \end{aligned}$$

Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ indépendant de $\mathcal{B}$.

On a montré que $\mathcal{B}$ est une tribu.

(*) Remarque: si on ne suppose pas les A_n disjoints, le résultat reste valable.

On s'inspire de la preuve du th de continuité croissante.

On note $A'_0 = A_0$ et $A'_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\right)$

de sorte que les A'_k sont disjoints et $\bigcup_{k=0}^n A_k = \bigcup_{k=0}^n A'_k$
et $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A'_k$

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } P\left(\left(\bigcup_k A_k\right) \cap B\right) &= P\left(\left(\bigcup_k A'_k\right) \cap B\right) \\
 &= P\left(\bigcup_k A'_k\right) P(B) = P\left(\bigcup_k A_k\right) P(B).
 \end{aligned}$$