

(a) Pour que $\left(\frac{\lambda}{n^s}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit une distribution de probabilités,
il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* & \frac{\lambda}{n^s} \geq 0 \\ \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\lambda}{n^s} = 1 \end{cases}$$

C'est à dire : $\lambda = \frac{1}{\zeta(s)}$ où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

(b) • Calculons d'abord, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P(A_n) = P\left(\bigcup_{k \in A_n} \{k\}\right) \quad \text{union disjointe}$$

$$= \sum_{k \in A_n} \frac{\lambda}{k^s} \quad \text{par } \sigma\text{-additivité}$$

$$= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(ni)^s} \quad \text{car } A_n = \{ni, i \in \mathbb{N}^*\} \text{ est l'ensemble des multiples de } n$$

$$= \frac{\lambda}{n^s} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^s}$$

$$= \frac{1}{n^s}$$

• Soit $p_1, \dots, p_m$ des nombres premiers distincts.

On veut montrer que $P(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}) = P(A_{p_1}) \times \dots \times P(A_{p_m})$

$$n \in A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m} \Leftrightarrow p_1 | n, \dots, p_m | n$$

$$\Leftrightarrow p_1 \dots p_m | n$$

Car ce sont des nombres premiers distincts

$$\Leftrightarrow n \in A_{p_1 \dots p_m}$$

On calcule donc:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^m A_{p_k}\right) = P\left(A_{\prod_{k=1}^m p_k}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^m p_k\right)^\alpha} \quad \text{par le calcul précédent}$$

$$= \prod_{k=1}^m \frac{1}{(p_k)^\alpha}$$

$$= \prod_{k=1}^m P(A_{p_k}) \quad \text{par le calcul précédent}$$

On a montré que $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants.

(c) 1 est le seul entier naturel qui n'est divisible par aucun premier, donc

$$\{1\} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$$

Énumérons les nombres premiers:

$$\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\} = \{p_k, k \in \mathbb{N}^*\}$$

Alors, en considérant l'intersection partielle:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^K \overline{A_{p_k}}\right) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{A_{p_k}}\right) = P(\{1\})$$

par continuité décroissante

$$\text{Or } P\left(\bigcap_{k=1}^K \overline{A_{p_k}}\right) = \prod_{k=1}^K P(\overline{A_{p_k}})$$

par indépendance de $(A_{p_1}, \dots, A_{p_K})$
donc de $(\overline{A_{p_1}}, \dots, \overline{A_{p_K}})$

$$= \prod_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{(p_k)^0}\right)$$

$$\xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{(p_k)^0}\right)$$

en notant le produit infini comme limite de produits finis

qui est convergent par la limite précédente. Le produit est

indépendant de l'ordre d'énumération, car en permutant son p_{k_i} ,

on obtient une somme de termes dans $] -\infty, 0[$.

On a écrit que $P(\{1\}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$

Mais $P(\{1\}) = \frac{\lambda}{1} = \frac{1}{\zeta(s)}$

et donc $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}$
