

On définit P_k l'événement « pile au lancer k »

F_k « face au lancer k »

On suppose les lancers indépendants

(a) On note A l'événement « personne ne gagne »

A est réalisé par les deux séquences $FPPP\dots$ et $PPPP\dots$

$$A = \bigcap_{k=2}^{+\infty} P_k$$

On écrit donc :

$$P\left(\bigcap_{k=2}^K P_k\right) \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} P(A) \quad \text{par continuité décroissante}$$

||

$$\prod_{k=2}^K P(P_k) \quad \text{par indépendance}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{K-1} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} 0$$

donc $P(A)=0$: il est presque sûr que l'un des deux joueurs gagne.

(b). Notons G_1 l'événement « le premier joueur gagne en faisant FF »
et $G_2 = \ll$ le second joueur a fait PF »

Par (a), $G_1 \neq \bar{G}_2$ mais $P(G_2) = 1 - P(G_1)$

• Comme $(P_1 P_2, P_1 F_2, F_1 P_2, F_1 F_2)$ est un système complet,
par la formule des probas totales:

$$\begin{aligned} P(G_1) &= \underbrace{P(G_1 | P_1 P_2)}_{=0} P(P_1 P_2) \\ &+ \underbrace{P(G_1 | P_1 F_2)}_{=0} P(P_1 F_2) \\ &+ \underbrace{P(G_1 | F_1 P_2)}_{=0} P(F_1 P_2) \\ &+ \underbrace{P(G_1 | F_1 F_2)}_{=1} P(F_1 F_2) \end{aligned}$$

- Sachant $P_1 F_2$, le deuxième joueur gagne au second lancer.
- Sachant $P_1 P_2$ ou $F_1 P_2$, le premier joueur ne peut pas gagner car s'il gagnait, il y aurait 2 faces successifs, donc au moins 1 face après un tiré de pile, donc le second joueur aurait gagné.

Par indépendance, $P(F_1 F_2) = P(F_1) P(F_2)$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Il reste: $P(G_1) = \frac{1}{4}$

et donc $P(G_2) = \frac{3}{4}$