

(a) On note  $g(x, y, z) = z - f(x, y)$

le plan tangent à  $S$  en  $M = (1, 1, e^{-2})$  est orthogonal

$$\tilde{a} \nabla g(1, 1, e^{-2}).$$

On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x e^{-(x^2+y^2)} + x^2(-2x) e^{-(x^2+y^2)} \\ &= 2x(1-x^2) e^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2(-2y) e^{-(x^2+y^2)}$$

et donc

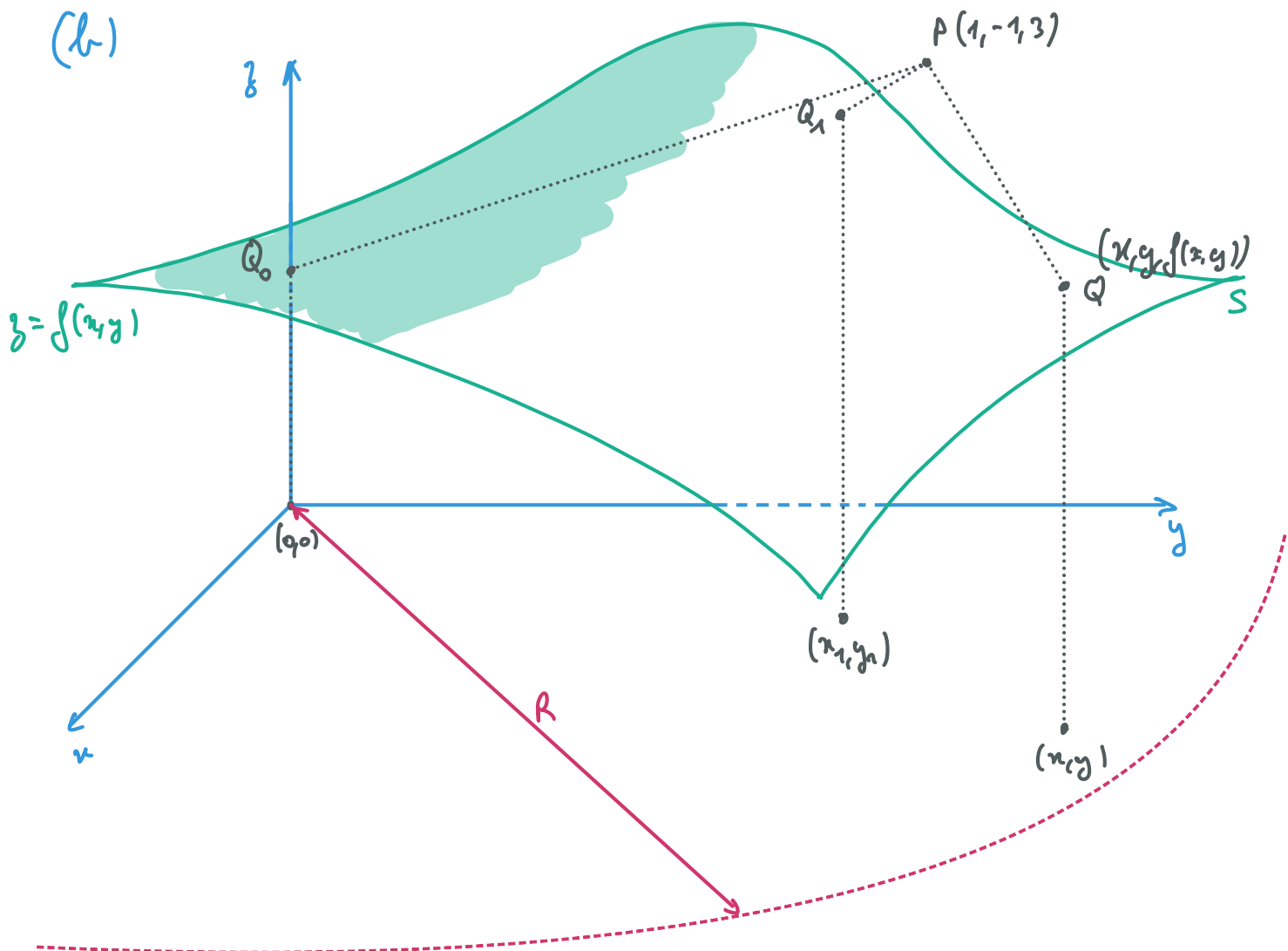
$$\nabla g(1, 1, e^{-2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2e^{-2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note  $T$  le plan tangent recherché. Il est dirigé par

$$T_M S = \nabla g(M)^\perp, \text{ et a donc pour équation:}$$

$$0(x-1) - 2e^{-2}(y-1) + 1(z-e^{-2}) = 0$$

$$\text{ie } \underline{-2e^{-2}y + z + e^{-2} = 0.}$$



On note  $Q = (x, y, f(x, y))$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$d_p^2(Q) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (x^2 e^{-(x^2+y^2)} - 3)^2$$

↑  
note  $h(x,y)$

Hyper h admet un minimum.

- $h(x, y) \xrightarrow{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$  donc par def de la limite

avec  $h(0,0)$ ,  $\exists R > 0$  s

$$\forall (n_g) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(n_g)\| \geq R \Rightarrow h(n_g) \geq h(0,0)$$

- $h$  continue sur  $BF((0,0), R)$  fermé borné.

donc par le lemme atténué,  $\exists (x_1, y_1) \in BF((0,0), R)$

$$\text{t.q. } \forall (x, y) \in BF((0,0), R) \quad h(x_1, y_1) \leq h(x, y)$$

- Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1<sup>er</sup> cas : si  $(x, y) \in BF((0,0), R)$ ,  $h(x, y) \geq h(x_1, y_1)$

2<sup>e</sup> cas si  $(x, y) \notin BF((0,0), R)$

$$h(x, y) \geq h(0, 0)$$

$$\geq h(x_1, y_1) \quad \text{car } (0, 0) \in BF((0,0), R)$$

Bref :  $h$  admet un minimum, atteint en  $(x_1, y_1)$