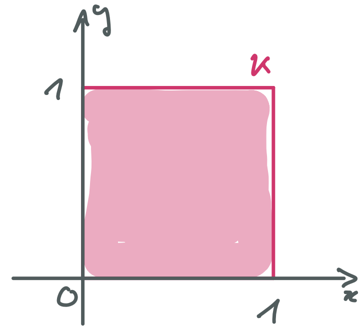
$$f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$



$$K = [0,1] \times [0,1]$$

- f est continue sur le fermé-borné K, donc admet un maximum par le th. des bornes atteintes. On le note γ.

global, sur K

- Étude de f sur $U =]0,1[\times]0,1[$

Si le maximum est atteint à l'intérieur de K (sur U), alors c'est un point critique.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 1.(1+x^2) - (x+y)(2x) = 0 \\ 1.(1+y^2) - (x+y)(2y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - 2xy - x^2 = 0 \\ 1 - 2xy - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - 2xy - x^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \qquad L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - 3x^2 = 0 \\ x = y \qquad \text{car } x, y > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Il y a un unique point critique, en $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

On calcule $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, noté α.

- <u>Étude de f au bord de K</u> :

Le bord de K apparaît comme union de 4 segments que l'on paramètre.

$*$ $f(t,0) = f(0,t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ noté $\varphi_1(t)$ $\quad t \in [0,1]$

$$\varphi_1'(t) = \frac{1.(1+t^2) - t(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{(1-t)(1+t)}{(1+t^2)^2}$$

D'où les variations :

t	0		1
φ_1'		$+$	0
φ_1	0	↗	$\frac{1}{2}$

$*$ $f(t,1) = f(1,t) = \dfrac{1+t}{2(1+t^2)}$ noté $\varphi_2(t)$ $\quad t \in [0,1]$

$$\varphi_2'(t) = \frac{1}{2}\,\frac{(1+t^2) - (1+t)2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-(t^2+2t-1)}{2(1+t^2)^2} = \frac{-(t-(\sqrt{2}-1))(t-(-\sqrt{2}-1))}{2(1+t^2)^2}$$

$\Delta' = 1+1 = (\sqrt{2})^2$

racines : $-1 \pm \sqrt{2}$

D'où les variations :

t	0		$\sqrt{2}-1$		1
φ_2'		$+$	0	$-$	
φ_2	$\frac{1}{2}$	↗	β	↘	$\frac{1}{2}$

Ainsi le maximum de f sur le bord de K est

$$\begin{aligned}
\beta &= f(\sqrt{2}-1,\ 1) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2(1+(\sqrt{2}-1)^2)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}\,(2-\sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{4\,(\sqrt{2}-1)} \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{4}
\end{aligned}$$

- On a montré que f admettait sur K un maximum, noté γ.

  Comme K est l'union de son intérieur et de son bord,

  $\gamma = \operatorname{Max}(\alpha, \beta)$

  On a $\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{8} \simeq 0{,}65$

  $\beta = \dfrac{\sqrt{2}+1}{4} \simeq 0{,}60$

  On peut conclure : $\underline{\max\limits_{K} f = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$