

On souhaite dans cet exercice déterminer la différentielle du déterminant par deux approches. On note :

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

Première approche Par les dérivées partielles.

(a) Justifier que l'application $\det$ est différentiable, et même $\mathcal{C}^1$.

Pour une matrice A , on note a_{ij} son coefficient générique.

(b) En exploitant le développement par rapport à une ligne ou une colonne, exprimer à l'aide des cofacteurs de A les dérivées partielles $\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A)$.

(c) En déduire la différentielle de $\det$.

(a) On identifie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$ en posant $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

On a :

$$\det((a_{ij})_{ij}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

est polynomiale en les a_{ij} , donc $\mathcal{C}^1$ en tant que fonction des n^2 variables $(a_{ij})_{ij}$.

(b) Fixons i, j et notons $\text{com}(A) = (A_{ij})_{ij}$

$$\text{ou } A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

avec Δ_{ij} mineur relatif au coefficient a_{ij}

En développant par rapport à la colonne j :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}$$

Les A_{kj} sont des constantes vis à vis de a_{ij} , ainsi que les a_{kj} lorsque $k \neq i$. Donc

$$\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) = A_{ij}$$

(c) Pour $H = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ dans la base canonique:

$$\begin{aligned} d \det(A) \cdot H &= \sum_{i,j} \frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A) \cdot h_{ij} \\ &= \sum_{i,j} A_{ij} \cdot h_{ij} \end{aligned}$$

on reconnaît $\langle \text{Com}(A), H \rangle$

pour le produit scalaire canonique.

Seconde approche Par la définition de la différentielle.

(d) On a justifié précédemment que $\det$ est $\mathcal{C}^1$.

Utiliser la dérivée selon un vecteur pour montrer que :

$$d \det(I_n) = \text{tr}$$

(e) Calculer $d \det(A)$ pour $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

(f) Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(g) Conclure :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d \det(A) : H \mapsto \text{tr}(\text{Com}(A)^\top H)$$

On ne souhaite pas ici identifier $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$

(a) (version sans coordonnées)

$$\begin{array}{ccc} \pi_{ij} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \quad \text{est linéaire, donc } \mathcal{C}^1 \\ A & \longmapsto & a_{ij} \end{array}$$

donc $\det = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \pi_{1\sigma(1)} \dots \pi_{n\sigma(n)}$ est $\mathcal{C}^1$ par
opération sur les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ ses v.p. complexes

À un voisinage de $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \det(I_n + tV) &= \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) \\ &= 1 + t \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(t^2) \\ &= 1 + t \cdot \text{tr}(V) + o(t) \end{aligned}$$

$$\text{donc } D_V \det(I_n) = \text{tr}(V)$$

On a montré en (c) que $\det$ est différentiable en I_n , donc $\forall V \in M_n(\mathbb{R})$

$$D_V \det(I_n) = d \det(I_n) \cdot V$$

Finalement, on a montré que $d \det(I_n) = \text{tr}$.

(e) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Aut voisinage de $H \rightarrow 0$, $H \in M_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \det(A+H) &= \det(A(I_n + A^{-1}H)) \\ &= \det(A) \det(I_n + A^{-1}H) \end{aligned}$$

on utilise une norme sous-multiplicative

$$\|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\| \|H\| \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$$

$$\begin{aligned} &= \det(A) \left(\det I_n + d \det(I_n) \cdot (A^{-1}H) + o(A^{-1}H) \right) \\ &= \det(A) \left(1 + \text{tr}(A^{-1}H) + o(H) \right) \\ &= \det(A) + \text{tr}(\det(A) A^{-1}H) + o(H) \end{aligned}$$

$$\text{avec } A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{com}(A))^T$$

$$= \det(A) + \underbrace{\text{tr}(\text{com}(A)^T H)}_{\text{linéaire en } H} + o(H)$$

$$\text{donc } \underline{d \det(A) \cdot H = \text{tr}(\text{com}(A)^T H)}$$

(f) classique

(g) Les coefficients de la comatrice sont polynomiaux en les coefficients de A , donc $A \mapsto \text{com}(A)$ est continue. Par composition avec la transposée et la trace, linéaires, ainsi que le produit, bilinéaire, pour H fixé,

$$A \mapsto \text{tr}(\text{com}(A)^T H)$$

est continue. Elle coïncide avec $A \mapsto d \det(A) \cdot H$, continue par (a), sur $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

$$\text{Donc } \underline{\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \quad d \det(A) \cdot H = \text{tr}(\text{com}(A)^T H)}$$

Remarque: si on munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit

scalaire canonique, on reconnaît $\langle \text{com}(A), H \rangle$

$$\text{donc } \nabla \det(A) = \text{com}(A)$$