Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\quad f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

(a) <u>Analyse</u>

Si f se prolonge par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0) = \alpha$, alors, pour $t \to 0$

$$\underset{\underset{0}{\parallel}}{f(t,0)} \longrightarrow \alpha$$

Donc $\alpha = 0$

<u>Synthèse</u>

<u>On pose $f(0,0) = 0$</u>.

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - f(0,0)|$$
$$= r^2 |\cos\theta \sin\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta)|$$
$$\leq 2r^2 \qquad \text{indépendant de } \theta$$
$$\xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Donc le <u>prolongement proposé est continu en $(0,0)$</u>

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est continue par opérations.

(b) Les dérivées partielles sont les dérivées des applications partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^5-4x^3y-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

(c) Les dérivées partielles sont les dérivées des applications partielles

$f(\cdot,0) = (x \longmapsto 0)$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

(d) • $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par opération.

• $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right|$

$= r \left| \cos^4\theta \sin\theta + 4\cos^2\theta \sin^3\theta - \sin^5\theta \right|$

$\leq 6r$ indépendant de θ

$\xrightarrow[r \to 0]{} 0$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$

• De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$

Ainsi les dérivées partielles existent et sont continues

donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

(e) • On calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$:

Les dérivées partielles sont les dérivées des applications partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\cdot) = (y \longmapsto -y)$$

dont la dérivée en 0 est -1

donc $\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1}$

• De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\cdot, 0) = (x \longmapsto x)$

donc $\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1}$

Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, par contraposée

du th de Schwarz, $\underline{f \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^2}$.