

On considère I un intervalle, et le système différentiel linéaire homogène :

$$\forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) \quad (E)$$

où $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue. On note S_H l'ensemble des solutions de (E) .

1. Pourquoi, à $t_0 \in I$ fixé, $\Phi_{t_0} : X \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme de S_H sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Pour $t, t_0 \in I$, on note :

$$R(t, t_0) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$$

On l'appelle **résolvante** en (t, t_0) de (E) .

2. Expliquer pourquoi $R(t, t_0)$ est un isomorphisme. Quelle est sa réciproque ?
3. Comment utiliser $R(t, t_0)$ pour résoudre (E) ?
4. Expliciter la résolvante $R(t, t_0)$ pour l'équation différentielle scalaire :

$$x'(t) = a(t)x(t)$$

[1] • Φ_{t_0} est bien sûr linéaire.

• le théorème de Cauchy-linéaire s'applique, car A est

continue sur I intervalle et que (E) est une équation différentielle linéaire.

Donc pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, il existe une unique solution de (E) tq $X(t_0) = X_0$

$$\text{c'est-à-dire } \Phi_{t_0}(X) = X_0$$

Ce qui justifie la bijectivité de Φ_{t_0}

[2] Φ_t et Φ_t^{-1} sont des isomorphismes, donc

$R(t, t_0) = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$ est un isomorphisme

et $R(t, t_0) : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ donc automorphisme

On calcule: $R(t, t_0)^{-1} = (\phi_{t_0} \circ \phi_t^{-1})^{-1}$
 $= \phi_t \circ \phi_{t_0}^{-1}$
 $= R(t_0, t)$

[3] $t \mapsto R(t, t_0)(x_0)$ est l'unique solution du
 problème de Cauchy $\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = x_0 \end{cases}$

[4] Noter, $A: t \mapsto \int_{t_0}^t a(u) du$ l'unique primitive de a
 qui s'annule en t_0 . Par la formule de résolution des
 eq. différentielles linéaires scalaires homogènes d'ordre 1:

Pour tout t ,

$$\begin{aligned} R(t, t_0)(x_0) &= x_0 e^{A(t)} \\ &= x_0 e^{\int_{t_0}^t a(u) du} \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$R(t, t_0) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x_0 \longmapsto \lambda x_0$$

$$\text{où } \lambda = \exp \left(\int_{t_0}^t a(u) du \right)$$