$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{u^2+x^2}\,du \qquad \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(u)}{u^2+x^2}\,du$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

* Si $x = 0$, l'intégrale définissant $\varphi(0)$ est évidemment convergente.

* Si $x \neq 0$,

  • $u \longmapsto \dfrac{x\cos(u)}{u^2+x^2}$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$

  • Au voisinage de $u \longrightarrow +\infty$:

$$\left|\frac{x\cos(u)}{u^2+x^2}\right| \leq \underbrace{\frac{x}{u^2}}_{\text{intégrable en } +\infty}$$

Donc l'intégrale définissant $\varphi(x)$ converge absolument.

On a montré que φ est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) • $x \longmapsto \dfrac{x\cos(u)}{x^2+u^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$

(pour $t \in [0,+\infty[$ fixé)

• Domination : pour $x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$

$$\left|\frac{x\cos u}{x^2+u^2}\right| \leq \frac{b}{a^2+u^2}$$

indép. de x

intégrable sur $[0,+\infty[$

Ainsi φ est continue sur tout $[a,b] \subset]0,+\infty[$

donc φ est continue sur $]0,+\infty[$.

(c) • <u>Si $x=0$</u> l'intégrale définissant $\psi(0)$ est évidemment convergente

et $\underline{\psi(0)=0}$

• <u>Si $x>0$</u> on calcule sous réserve de convergence

(le changement de variable conserve la nature de l'intégrale)

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{u^2+x^2}\,du \qquad \begin{array}{l} t = xu \\ dt = x\,du \end{array}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \left[\operatorname{Arctan} t\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

• <u>Pour $x<0$</u>, par imparité de ψ : $\psi(x) = -\frac{\pi}{2}$

On a montré :
$$\underline{\psi(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -\pi/2 & \text{si } x<0 \end{cases}}$$

(d) • * $u \longmapsto \dfrac{\cos(u)-1}{u^2}$ est continue (par ucx) sur $]0,+\infty[$

* au voisinage de 0

$$\frac{\cos(u)-1}{u^2} = \frac{1-\frac{u^2}{2}+o(u^2)-1}{u^2}$$

$$\underset{0}{\sim} -\frac{1}{2} \quad \text{intégrable en } 0$$

* au voisinage de $+\infty$

$$\frac{\cos(u)-1}{u^2} = \frac{O(1)}{u^2}$$

$$= O\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad \text{intégrable en } +\infty$$

On a montré que $u \longmapsto \dfrac{\cos(u)-1}{u^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

donc l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\cos u - 1|}{u^2}\, du$ converge

- On calcule, pour $x>0$:

$$\left|\varphi(x) - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\varphi(x) - \psi(x)\right|$$

$$= \left| \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(u)}{u^2+x^2}\, du - \int_0^{+\infty} \frac{x}{u^2+x^2}\, du \right|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \frac{x\,|\cos u - 1|}{u^2+x^2}\, du$$

$$\leq x \int_0^{+\infty} \frac{|\cos u - 1|}{u^2}\, du$$

$$= Kx$$

(e) • $\forall x>0, \quad \left|\varphi(x) - \frac{\pi}{2}\right| \leq Kx \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

donc $\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\pi}{2} \neq \varphi(0)$

donc <u>φ n'est pas continue en 0</u>.

• * Par (b), φ est continue sur $]0,+\infty[$ et par imparité,

φ est continue sur $]-\infty, 0[$

* $\varphi(x) \xrightarrow[x \overset{>}{\to} 0]{} \frac{\pi}{2}$ par le point précédent

* $\varphi(x) \xrightarrow[x \underset{<}{\to} 0]{} -\frac{\pi}{2}$ par imparité

Donc <u>φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$</u>

<u>Remarque</u>: la continuité par mcx sur l'interval $]-\infty,+\infty[$, c'est la continuité par mcx sur tout segment de $]-\infty,+\infty[$. Soit $[A,B] \subset]-\infty,+\infty[$.

* Si $[A,B] \subset]0,+\infty[$ ou $[A,B] \subset]-\infty, 0[$, φ est continue sur $[A,B]$

* Si $0 \in [A,B]$, $(A, 0, B)$ est une subdivision adaptée à φ:

↳ φ est continue sur $]A, 0[$ et $]0, B[$

↳ φ a une limite finie en A à droite, en 0 à gauche,

en 0 à droite et en B à gauche.