$$f(x) = \int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1} \ln t} \, dt$$

(a) On cherche les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale converge.

On note $h(x,t) = \dfrac{1}{t^{x+1} \ln t}$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$t \longmapsto \dfrac{1}{t^{x+1} \ln t}$ est continue (par ucx) sur $[e, +\infty[$

* Si $x > 0$

Au voisinage de $t \to +\infty$ $\quad \dfrac{1}{t^{x+1} \ln t} = o\left(\dfrac{1}{t^{x+1}}\right)$

intégrable car $x+1>1$

* Si $x = 0$

$\dfrac{1}{t \ln t}$ se primitive en $\ln(\ln t)$ de limite infinie

en $+\infty$ donc l'intégrale diverge.

* Si $x < 0$

$\dfrac{1}{t^{x+1} \ln t} \geqslant \dfrac{1}{t \ln t} \geqslant 0$ $\quad$ d'intégrale divergente

En conclusion : $D =]0, +\infty[$

(b) * À t fixé, $x \longmapsto \dfrac{1}{t^{x+1} \ln t} = \dfrac{1}{e^{(x+1)\ln t} \ln t}$

est continue sur $]0, +\infty[$

* <u>Dominons</u>: pour $x \in [a,+\infty[\subset]0,+\infty[$, $t \in [e,+\infty[$

$$\left| \frac{1}{t^{x+1} \ln t} \right| \leq \frac{1}{t^{a+1} \ln t}$$ intégrable sur $[e,+\infty[$ indépendant de x

Par le <u>th de continuité des intégrales à paramètre</u>, f est continue sur tout $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$ donc <u>continue sur $]0,+\infty[$</u>.

(c) On applique le <u>th de convergence dominée à paramètre continu</u>:

* Soit $t \in [e,+\infty[$ fixé.

$$\frac{1}{t^{x+1} \ln t} = \frac{1}{e^{(x+1)\ln t} \ln t} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

* Pour $x \in [1,+\infty[$, $t \in [e,+\infty[$

$$\left| \frac{1}{t^{x+1} \ln t} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$ indép de x, intégrable sur $[e,+\infty[$

Donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \int_e^{+\infty} 0 \, dt = 0$

On a montré que <u>$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$</u>

<u>Autre méthode</u>:

$$|f(x)| \leq \int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}} dt = \left[-\frac{1}{x} \frac{1}{t^x} \right]_e^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

(d) • $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{x+1}\ln t}$ est <u>intégrable</u> sur $[e, +\infty[$ par (a)

• $x \longmapsto \dfrac{1}{t^{x+1}\ln t} = \dfrac{e^{-(x+1)\ln t}}{\ln t}$ est <u>$\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$</u>

et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -e^{-(x+1)\ln t} = \dfrac{-1}{t^{x+1}}$

• <u>Dominons</u> : pour $x \in [a,+\infty[\subset]0,+\infty[$

$$\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{t^{x+1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{t^{a+1}}$$ indép. de x intégrable sur $[e,+\infty[$

Donc par le th. de classe $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre,

f est $\mathcal{C}^1$ sur tout $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$ donc <u>$\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$</u>

et $f'(x) = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{-1}{t^{x+1}}\,dt$

$$= \left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{t^x}\right]_e^{+\infty}$$

$$= -\frac{e^{-x}}{x}$$

(e) • <u>Étudions l'existence de $\varphi(x)$:</u>

* Si $x > 0$, $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue (par morceaux) sur $[x, +\infty[$

et, au voisinage de $t \to +\infty$, $\dfrac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$ avec

$t \mapsto e^{-t}$ intégrable en $+\infty$, donc $\varphi(x)$ existe.

* Si $x = 0$, $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$

mais, au voisinage de $t \to 0$, $\dfrac{e^{-t}}{t} \sim \dfrac{1}{t}$ qui n'est

pas intégrable en 0, donc $\varphi(0)$ n'existe pas.

* Si $x < 0$, $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ n'est pas continue par morceaux sur $[x, +\infty[$

donc l'intégrale $\varphi(x)$ n'existe pas.

Ainsi, <u>φ est définie sur $]0, +\infty[$</u>

• $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ donc l'intégrale fonction de la borne d'en bas $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ est dérivable

et $\varphi'(x) = -\dfrac{e^{-x}}{x}$

De plus $\varphi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ comme reste d'intégrale convergente.

Bref : φ et f ont même dérivée et même limite en $+\infty$: $\underline{\varphi = f}$

<u>Remarque :</u> on peut aussi faire le changement de variable $u = x \ln t$

pour montrer que $\varphi(x) = f(x)$.

(f) <u>Au voisinage de $x \xrightarrow{>} 0$:</u>

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \qquad \text{par (e)}$$

$$= \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt + \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt}_{\text{cste}}$$

cf ci-après

$$= O(1) \qquad - \ln(x) \qquad + O(1)$$

$$\underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)$$

$$\frac{e^{-t}-1}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} 1 \quad \text{donc} \quad \int_{\to 0}^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt \quad \text{converge}$$

$$\text{donc} \quad \int_x^1 \frac{e^{-t}-1}{t} \xrightarrow[x \to 0]{} \int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$$