

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

(a) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Expliciter $f'(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

(c) On admet que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

(d) **[*]** Démontrer que f est continue en 0.

(d) On s'intéresse à

$$f(x) - f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} (e^{-xt} - 1) dt$$

par parties, sous réserve de limite finie du cosinus

en prenant $\frac{\sin t}{t}$ en $G(t) = -\int_t^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$

$$= \left[G(t) (e^{-xt} - 1) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} G(t) (-x) e^{-xt} dt$$

$$= 0 - 0 + x \int_0^{+\infty} G(t) e^{-xt} dt$$

car $G(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ reste d'intégrale convergente

$$= \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$$

en posant $u = xt$, $du = x dt$

$$\xrightarrow[x > 0]{x \rightarrow 0} 0$$

par convergence dominée détaillée en page suivante.

Donc f est continue en 0.

On note $h(x, u) = G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u}$

• Pour $u \in]0, +\infty[$ fixe, $G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

car $G(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

• Dominée!

* $G(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ est continue sur $]0, +\infty[$

comme intégrale définie de la borne d'en bas

d'une fonction continue par morceaux sur $]0, +\infty[$

* $G(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du}_{\in \mathbb{R}}$ (intégral cv)

donc G est continue sur $[0, +\infty[$

* $G(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

donc, par définition de limite avec $\varepsilon = 1$,

$\exists A \in \mathbb{R} \forall t \geq A, |G(t)| \leq 1$

* G continue sur le segment $[0, A]$ donc bornée.

Ainsi $M = \|G\|_{\infty}^{[0, +\infty[}$ existe

On a: $\forall x \in]0, +\infty[, \forall u \in]0, +\infty[$

$|h(x, u)| \leq M e^{-u}$ indép. de x
intégrable sur $]0, +\infty[$

Donc $\int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par cv. dominée