$$I = \int_1^{+\infty} \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\, dx$$

(a) • $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$, à valeurs dans $]0, 1]$

et Arcsin est continue sur $]0,1]$, donc $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}$

est continue sur $[1, +\infty[$

• <u>Au voisinage de $x \longrightarrow +\infty$</u>

On commence par chercher un DL(0) de Arcsin u.

$$\operatorname{Arcsin}'(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = (1-u^2)^{-1/2}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$$

donc $\operatorname{Arcsin}(u) = 0 + u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3)$

donc $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \sim \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^3}$ intégrable en $+\infty$

(b) On calcule, par intégration par parties, sous réserve de limite finie du crochet:

$$I = \int_1^{+\infty} 1 \; \operatorname{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \left[x\left(\operatorname{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} - (-)\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Pour $x \to +\infty$, $x\left(\text{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = x\,\text{Arcsin}\frac{1}{x} - 1$

$$= x\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - 1$$

$$= o(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Pour $x = 1$, $x\left(\text{Arcsin}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = \text{Arcsin}\,1 - 1$

$$= \frac{\pi}{2} - 1$$

Le crochet est bien de limites finies.

$$I = 1 - \frac{\pi}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x} \, dx$$

On remarque que

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right) = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right) \cdot \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$I = 1 - \frac{\pi}{2} + \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \ln x\right]_1^{+\infty}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} + \left[\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]_1^{+\infty}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{2} + \ln 2$$