(a) • $x \longmapsto \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$

• Au voisinage de 0 :

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} = \frac{(1-ax+o(x))-(1-bx+o(x))}{x}$$

$$= b-a + o(1)$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} b-a$$

L'intégrande se prolonge par continuité en 0, donc l'intégrale

est faussement généralisée, convergente, en 0

• Au voisinage de $+\infty$ :

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} \sim -\frac{e^{-ax}}{x} \qquad \text{car } a<b$$

$$= o(e^{-ax})$$

intégrable au voisinage de $+\infty$ $(b>0)$

Ainsi, on a montré l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$

(b) Fixons $h>0$, et calculons :

$$\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \int_h^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{x}\,dx - \int_h^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{x}\,dx$$

(ces deux intégrales sont bien convergentes)

On pose $u = ax$ dans la première intégrale,
$u = bx$ dans la seconde.

$$= \int_{ah}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{a}} \frac{du}{a} - \int_{bh}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\frac{u}{b}} \frac{du}{b}$$

$$= \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-u}}{u} du$$

(c) • Au voisinage de 0, $\frac{e^{-t}-1}{t} = -1 + o(1)$ (comme en (a))

donc $t \mapsto \frac{e^{-t}-1}{t}$ se prolonge par continuité en 0. On note

encore $g$ la fonction prolongée.

• Écrivons, avant de faire tendre $h \to 0$ :

$$\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x} dx = \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}-1+1}{t} dt \qquad \text{par (b)}$$

$$= \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}-1}{t} dt + \int_{ah}^{bh} \frac{1}{t} dt$$

$$= \int_0^{bh} g(t)\, dt + \int_0^{ah} g(t)\, dt - \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} 0 - 0 + \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

car ce sont des restes d'intégrales convergentes.

Ainsi : $\underline{I = \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$