$$v_n = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$$

(a) On écrit :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} k^\alpha \\ &= n^{\alpha+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha}_{S_n} \end{aligned}$$

On reconnaît dans S_n la somme de Riemann (à droite) de la fonction $t \longmapsto t^\alpha$ sur $[0,1]$. Comme cette fonction est continue, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 t^\alpha \, dt = \frac{1}{\alpha+1}$

(On a bien $\alpha \neq -1$ car $\alpha \geqslant 0$)

Par suite, $\underline{v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$

(b) On connaît, pour $\alpha = 1$, $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$$

On connaît, pour $\alpha = 2$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{3}$$