$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$$

<u>Remarque</u>. La variable de f apparaît dans la borne du haut, mais aussi dans l'intégrande. Il n'y a pas de résultat permettant de dériver directement ces expressions.

<u>Remarque</u>. Pour $x>0$, $t \longmapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur le segment $[0, x]$, l'intégrale n'est pas généralisée.

- On effectue le changement de variable affine

$$u = x+t$$
$$du = dt$$
$$u \text{ de } x \text{ à } 2x, \quad t \text{ de } 0 \text{ à } x$$

Pour tout $x>0$,
$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{x-u}}{u}\,du$$
$$= e^{x} \int_x^{2x} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

Or $u \longmapsto \frac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $]0,+\infty[$

donc $x \longmapsto \int_1^x \frac{e^{-u}}{u}\,du$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto \frac{e^{-x}}{x}$.

Par produit et composition, on en déduit que

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$f'(x) = e^{x} \int_{x}^{2x} \frac{e^{-u}}{u}\,du + e^{x}\left[2 \cdot \frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x}\right]$$

$$= f(x) + \frac{e^{-x}}{x} - \frac{1}{x}$$

- Par récurrence sur n, f est n-fois dérivable pour tout n.

Remarque : c'est classique ! f est dérivable donc f' l'est, c'est-à-dire que f est 2-fois dérivable, donc f' l'est, donc f est 3-fois dérivable etc...