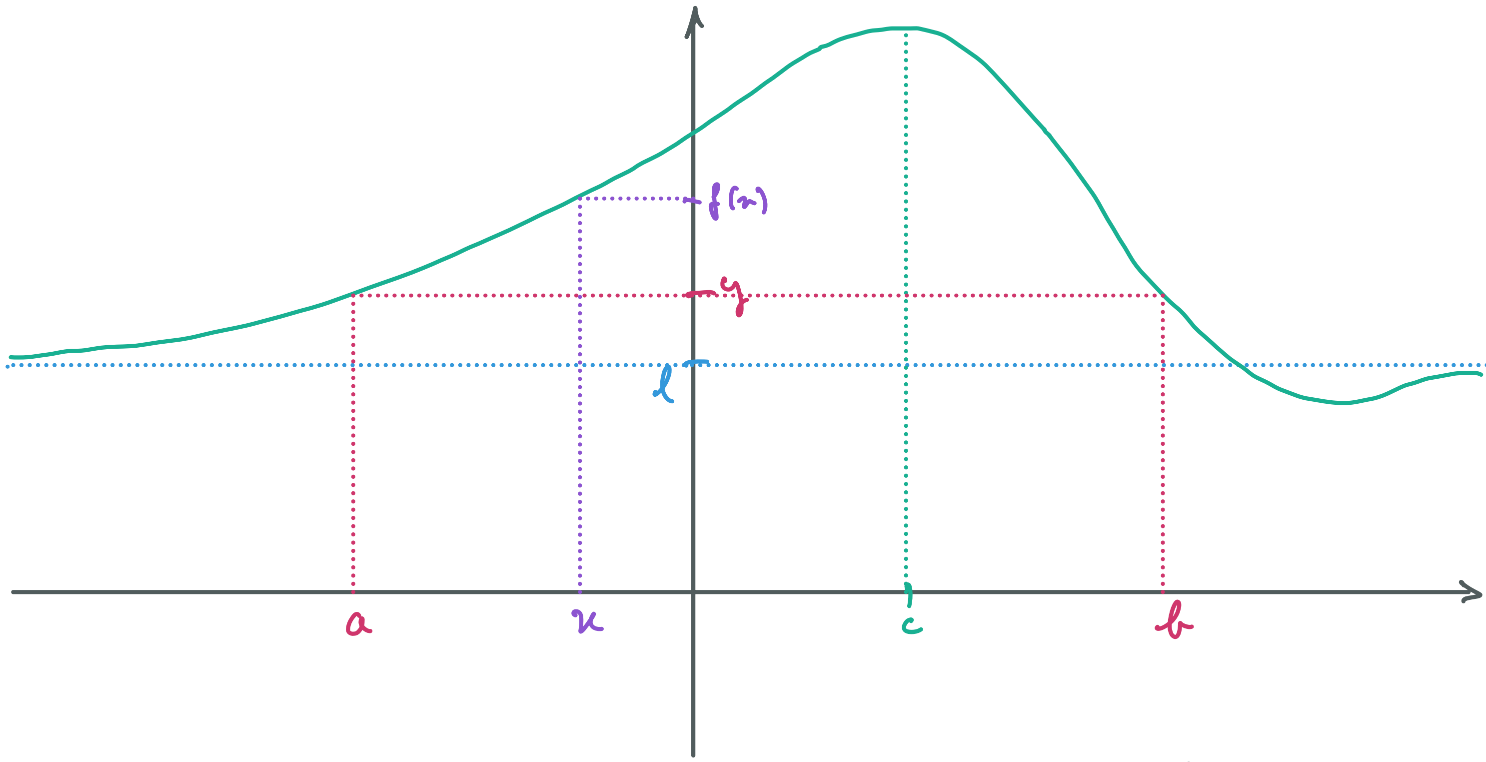
Théorème de Rolle généralisé

- Si f est constante, la propriété est immédiate.

$\boxed{\text{M1}}$

- On suppose donc f non constante



On considère x tq $f(x) \neq \ell$ et $y = \dfrac{f(x)+\ell}{2}$.

Par continuité de f sur l'intervalle $]-\infty, x]$, il existe $a < x$ tq $f(a) = y$, par le th. des valeurs intermédiaires.

De même, $\exists\, b > x$ tq $f(b) = y$.

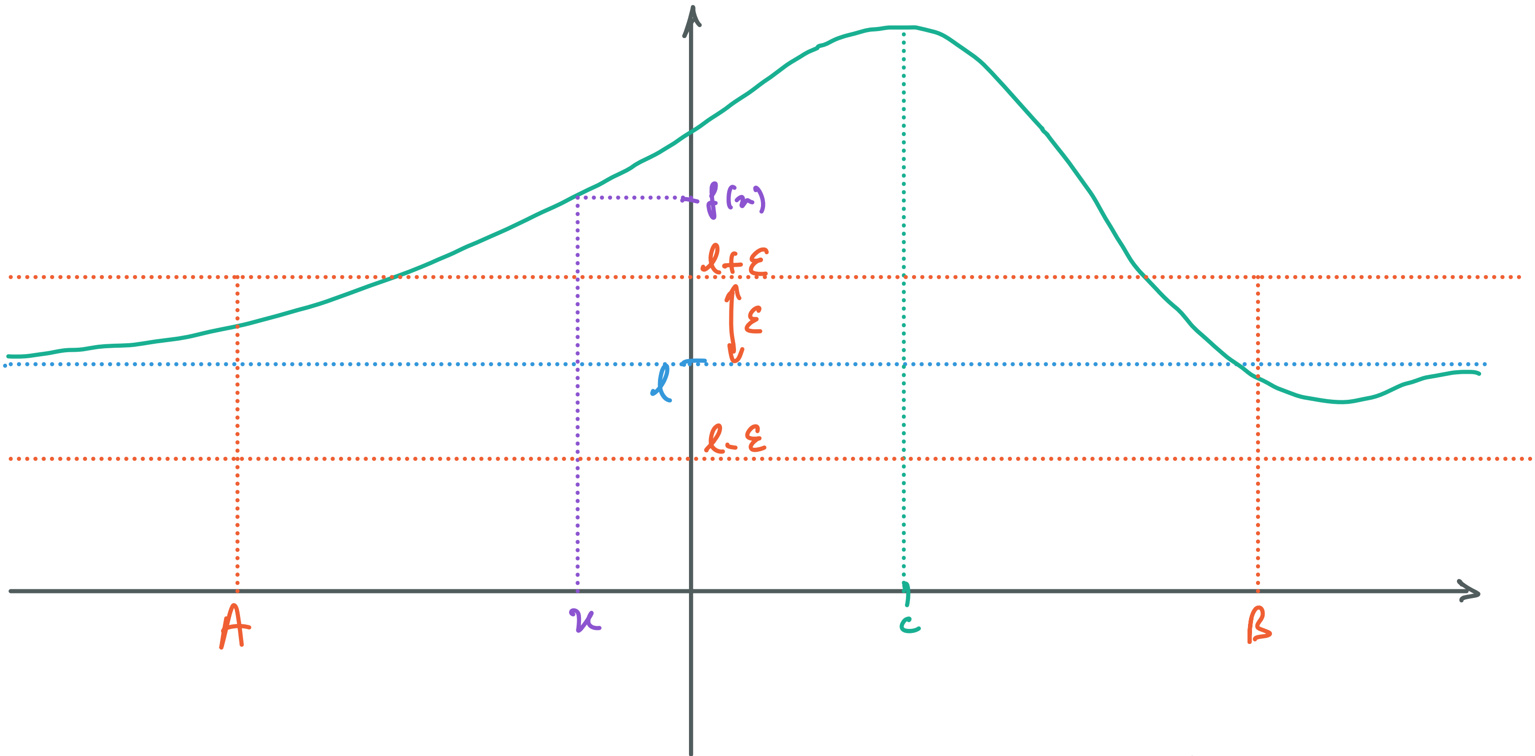
On applique alors le th de Rolle à f sur $[a, b]$:

f est dérivable sur $[a,b]$ et $f(a) = f(b)$

donc il existe $c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$

$\boxed{M2}$ On adapte la démonstration du th. de Rolle.

On considère x tq $f(x) \neq \ell$, par exemple $f(x) > \ell$.



On applique la définition de limite avec $\varepsilon = \dfrac{f(x)-\ell}{2}$.

d'où l'existence de $A<0$ tq $\forall t \in]-\infty, A]$, $f(t) \leq \ell + \varepsilon < f(x)$

et $B>0$ tq $\forall t \in [B, +\infty[$, $f(t) \leq \ell + \varepsilon < f(x)$

Par le th. des bornes atteintes, à f continue sur $[A, B]$ segment, il existe $c \in [A, B]$ tq f admet en c un maximum.

Par le choix de ε, $x \in]A, B[$ donc

$$f(A) < f(x) \leq f(c)$$

et

$$f(B) < f(x) \leq f(c)$$

Donc le max est atteint à l'intérieur de $]A, B[$, et

f est dérivable en c, donc $f'(c)=0$.

$\boxed{M3}$ On peut aussi raisonner de la façon astucieuse suivante.

On note $g = f\circ\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(\tan x)$$

Par composition, $g(x) \xrightarrow[x \to -\frac{\pi}{2}]{>} \ell$

et $g(x) \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{<} \ell$

On prolonge donc g par continuité au segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Par composition, g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et $g(-\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2})$ donc, par le th. de Rolle,

il existe $d \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tq $g'(d) = 0$

$$g'(d) = \underbrace{(1+\tan^2 d)}_{\neq 0} f'(\tan(d))$$

donc, avec $c = \tan(d)$, on a $\underline{f'(c)=0}$