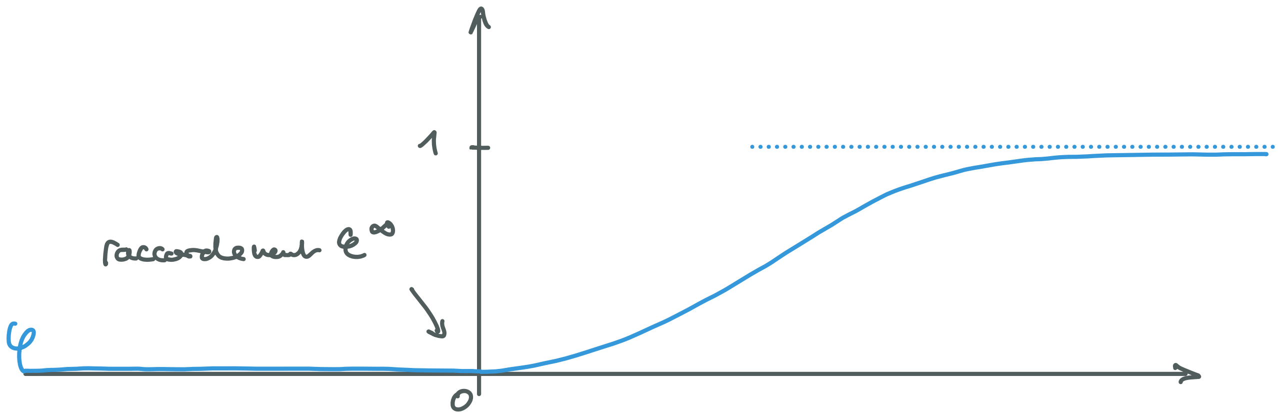
(a) $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



- φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

- * Pour $x \xrightarrow{\leq} 0$, $\varphi(x) = 0 \longrightarrow 0$

  * Pour $x \xrightarrow{\geq} 0$, $\varphi(x) = e^{-1/x} \longrightarrow 0$ car $\frac{1}{x} \longrightarrow +\infty$

  donc <u>φ est continue en 0</u>.

- On applique le th limite de la dérivée

  * Pour $x \xrightarrow{\leq} 0$, $\varphi'(x) = 0 \longrightarrow 0$

  * Pour $x \xrightarrow{\geq} 0$, $\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x} \longrightarrow 0$

    car $u^2 e^{-u} \underset{u \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

  donc, par limite de la dérivée,

  <u>φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(0) = 0$</u>

- Montrons par récurrence sur n que φ est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$

  et qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

* la propriété a été vérifiée pour $n=0$ et $n=1$,

avec $P_0 = 1$ et $P_1 = X$

* Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que φ est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et

qu'il existe un polynôme P_n tq

$$\varphi^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

On applique le th limite de la dérivée à la

fonction $\varphi^{(n)}$ qui est continue.

- ☐ Pour $x \xrightarrow{<} 0$, $\varphi^{(n+1)}(x) = 0 \longrightarrow 0$

- ☐ Pour $x \xrightarrow{>} 0$,

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} + P_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} e^{-1/x} \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-1/x} \\ &= P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}\end{aligned}$$

en posant $P_{n+1}(X) = -X^2 P_n'(X) + X^2 P_n(X)$

$\xrightarrow[x \xrightarrow{>} 0]{} 0$ car $P_{n+1}(u) e^{-u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0$

car $P_{n+1}(u) \underset{+\infty}{=} o(e^u)$

Donc φ est $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ et il existe $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$

tq

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

* Par récurrence, on a montré que φ est $\mathcal{C}^n$ $\forall n$.

(b) $\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On remarque que :

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

Donc, $\forall x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{1-x}} e^{-\frac{1}{1+x}}$

$= \varphi(1-x)\,\varphi(1+x)$

car $1-x>0$ et $1+x>0$

et $\forall x \notin]-1, 1[$, $\varphi(x) = 0$

$= \varphi(1-x)\,\varphi(1+x)$

car $1-x \leq 0$ ou $1+x \leq 0$

Bref, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(1-x)\,\varphi(1+x)$

donc φ est $\mathcal{C}^\infty$ par opérations sur les fct $\mathcal{C}^\infty$.