$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt$$

(a) On effectue une intégration par parties, valable car f est $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 t^n f(t)\, dt \\
&= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} f(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1} f'(t)\, dt \\
&= \frac{1}{n+1} f(1) - \frac{1}{n+1} \underbrace{\int_0^1 t^{n+1} f'(t)\, dt}_{J_n}
\end{aligned}$$

$$\text{avec } \quad \begin{aligned}
|J_n| &\leq \int_0^1 t^{n+1} |f'(t)|\, dt \\
&\leq M \int_0^1 t^{n+1} \qquad (*) \\
&= M \cdot \frac{1}{n+1} \\
&= o(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} f(1) - \frac{1}{n+1} o(1) \\
&= \frac{1}{n+1} f(1) + o\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&\sim \frac{1}{n+1} f(1) \\
&\sim \frac{1}{n} f(1)
\end{aligned}$$

(*) On a utilisé le th. des bornes atteintes. Comme f est $\mathcal{C}^1$, la fonction f' est continue sur le segment $[0,1]$ donc $\exists M$ tq $\forall t \in [0,1]$, $|f'(t)| \leq M$.

(b) Si on ne suppose f que continue, on ne peut pas faire d'intégration par parties, mais le résultat doit être le même (au moins pour les fonctions $\mathcal{C}^1$!). On s'intéresse donc à :

$$\left| I_n - \frac{1}{n+1} f(1) \right| = \left| \int_0^1 t^n f(t)\,dt - \frac{1}{n+1} f(1) \right|$$

$$= \left| \int_0^1 t^n f(t)\,dt - \int_0^1 t^n f(1)\,dt \right|$$

$$= \frac{1}{n+1} \underbrace{\left| (n+1) \int_0^1 t^n \big(f(t) - f(1)\big)\,dt \right|}_{\text{on va montrer que ce terme } \longrightarrow 0}$$

Pour cela, on revient à la définition de limite avec ε.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par définition de $f(t) \xrightarrow[t\to 1]{} f(1)$,

$$\exists \eta < 1 \text{ tq } \forall t \in [\eta, 1] \quad |f(t) - f(1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Par le théorème des bornes atteintes, f étant continue sur $[0,1]$ segment,

$$\exists M \text{ tq } \forall t \in [0,1] \quad |f(t)| \leq M$$

On écrit donc :

$$\left| (n+1) \int_0^1 t^n \big(f(t) - f(1)\big)\,dt \right|$$

$$\leq (n+1) \int_0^\eta t^n |f(t) - f(1)|\,dt + (n+1) \int_\eta^1 t^n |f(t) - f(1)|\,dt$$

$$\leq (n+1) \int_0^\eta t^n \big(|f(t)| + |f(1)|\big)\,dt + (n+1) \frac{\varepsilon}{2} \int_{\cancel{\eta}\,0}^1 t^n\,dt$$

on majore

$$\leq 2M \eta^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Par définition de $\eta^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, avec $\frac{\varepsilon}{4M}$,

$$\exists n_0 \text{ tq } \forall n \geq n_0 \quad \eta^{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{4M}$$

Donc, pour $n \geq n_0$,

$$\left| (n+1) \int_0^1 t^n (f(t) - f(1))\, dt \right| \leq 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

On a montré, en revenant à la définition, que

$$\left| (n+1) \int_0^1 t^n (f(t) - f(1))\, dt \right| \underset{n \to +\infty}{=} o(1)$$

et donc

$$\underline{I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} f(1)}$$