$$f(x) = 1 + x^2 \sin\frac{1}{x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

(a) Au voisinage de $x \to 0$:

$$f(x) = 1 + x^2\, O(1)$$

$$= 1 + 0x + o(x)$$

<u>f admet un $DL_1(0)$</u> donc se prolonge en 0 en une fonction dérivable en posant $f(0) = 1$.

On a alors $f'(0) = 0$.

$f(x) = 1 + 0x + o(x)$

(b) Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Au voisinage de $x \to 0$,

$$2x \sin\frac{1}{x} = 2x\, O(1)$$

$$= o(1)$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$\cos\frac{1}{x}$ n'a pas de limite

En effet $f'\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi) - \cos(n\pi)$

$$= (-1)^n \quad \text{n'a pas de limite.}$$

Donc f' n'est pas continue en 0, donc <u>n'admet pas de $DL_0(0)$</u>.