$$\sum \operatorname{Arctan} \frac{1}{p^2+p+1}$$

(a) Au voisinage de $p \to +\infty$:

$$\begin{aligned} u_p &= \operatorname{Arctan} \frac{1}{p^2+p+1} \\ &\sim \frac{1}{p^2+p+1} && \text{car } \operatorname{Arctan} x \underset{0}{\sim} x \\ &\sim \frac{1}{p^2} && \text{t.g. d'une série absolument convergente} \end{aligned}$$

Donc, par équivalent, $\underline{\sum u_p \text{ converge}}$ (absolument)

(b) Calculons plutôt la tangente :

$$\begin{aligned} &\tan(\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p)) \\ &= \frac{\tan(\operatorname{Arctan}(p+1)) - \tan(\operatorname{Arctan}(p))}{1 + \tan(\operatorname{Arctan}(p+1))\tan(\operatorname{Arctan}(p))} \\ &= \frac{p+1 - p}{1 + (p+1)\,p} \\ &= \frac{1}{p^2+p+1} \end{aligned}$$

Mais d'autre part, $\operatorname{Arctan}(p) \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$\operatorname{Arctan}(p+1) \in [0, \frac{\pi}{2}[$

donc $\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

C'est donc que $\underline{\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p) = \operatorname{Arctan} \frac{1}{p^2+p+1}}$

(c) On a donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_p = \sum_{p=0}^{+\infty} \operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p) \qquad \text{par (b)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(0) \qquad \text{par télescopage}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Pour justifier correctement le télescopage, on passe par les sommes partielles :

$$\sum_{p=0}^{n} u_p = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p)$$

$$= \sum_{p=1}^{n+1} \operatorname{Arctan}(p) - \sum_{p=0}^{n} \operatorname{Arctan}(p)$$

par glissement d'indice

$$= \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(0)$$

par télescopage

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$