$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$$

- <u>Recherche du domaine de définition</u> :

$$x \in D_f \iff \begin{cases} 2(x^2+1) > 0 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \in D_{\operatorname{Arcsin}} = [-1, 1] \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{1 - \left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)^2}_{} \geq 0$$

$$= \frac{2(x^2+1) - (x+1)^2}{2(x^2+1)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{2(x^2+1)} = \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}$$

Ainsi, $\underline{D_f = \mathbb{R}}$.

On peut préciser que, par opérations sur les fonctions continues, <u>f est continue sur $\mathbb{R}$</u>

• <u>Variations</u>

Lorsque $\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \in]-1,1[$, ie $x \neq 1$, on peut appliquer le th. de dérivation des fonctions composées :

$$\forall x \neq 1, \quad f'(x) = \frac{1.\sqrt{2(x^2+1)} - (x+1)\frac{4x}{2\sqrt{2(x^2+1)}}}{2(x^2+1)} \; \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right)^2}}$$

$$= \frac{2(x^2+1)-(x+1)\,2x}{\left(2(x^2+1)\right)^{3/2}} \sqrt{\frac{2(x^2+1)}{(x-1)^2}}$$

$$= \frac{(1-x)}{(x^2+1)} \cdot \frac{1}{|x-1|}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x<1 \\ \frac{-1}{x^2+1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

• <u>Limites</u>

* Au voisinage de $x \to +\infty$, $\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $f(x) \to \frac{\pi}{4}$

* Au voisinage de $x \to -\infty$, $\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}} \sim \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc $f(x) \to -\frac{\pi}{4}$

* En $x=1$, $f(1) = \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$

D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1		$\|\|$	$-$	
f	$-\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$

• <u>Dérivabilité en 1</u> ?

f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour $x \underset{<}{\to} 1$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

donc f est dérivable à gauche et $f'_g(1) = \frac{1}{2}$

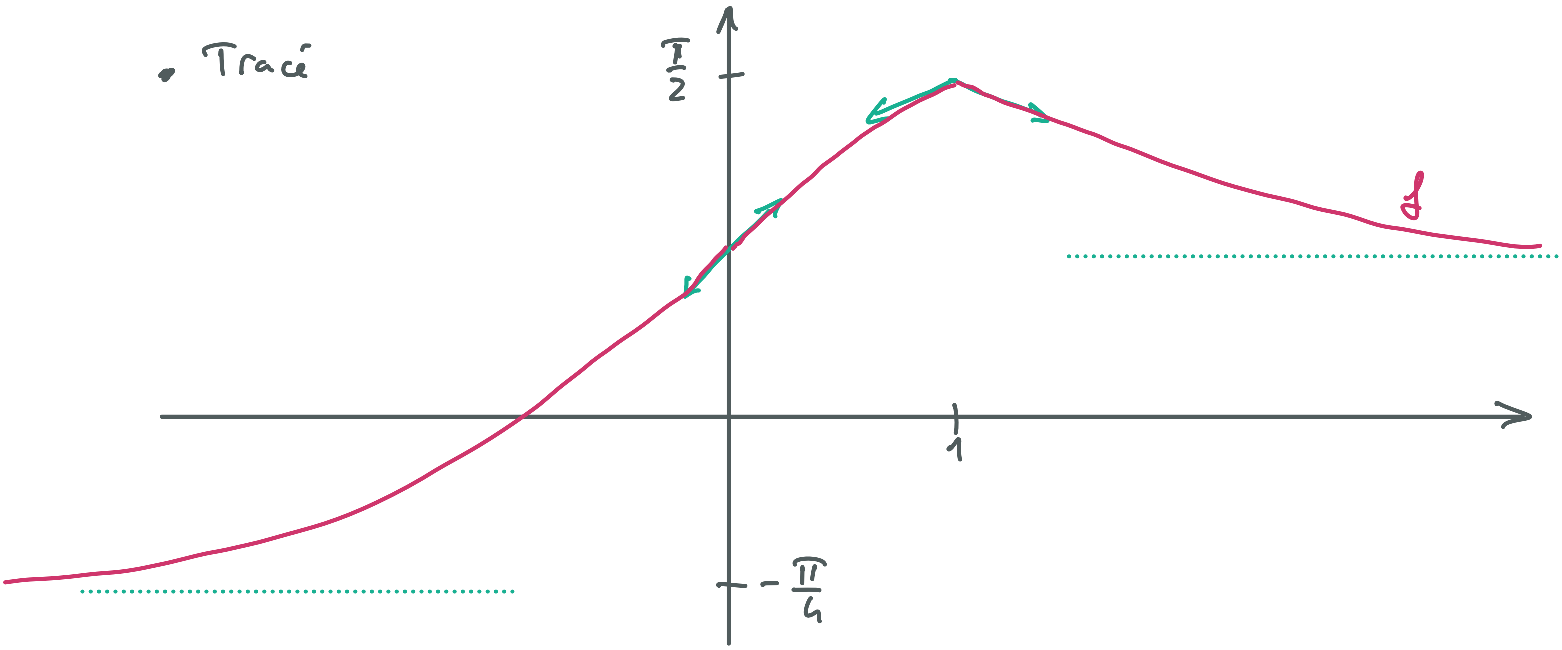
par le th. limite de la dérivée.

Pour $x \underset{>}{\to} 1$ $f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2} \longrightarrow -\dfrac{1}{2}$

donc f est dérivable à droite et $f'_d(1) = -\frac{1}{2}$

En particulier, <u>f n'est pas dérivable en 1.</u>

• Tracé



- **Remarque:**

 * Sur l'intervalle $]1,+\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

 donc $\exists C_1$ tq $\forall x > 1$, $f(x) = -\text{Arctan}\, x + C_1$

 Vu la limite en 1 ou $+\infty$, $f(x) = -\text{Arctan}\, x + \frac{3\pi}{4}$

 * Sur l'intervalle $]-\infty,1[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

 donc $\exists C_2$ tq $\forall x < 1$, $f(x) = \text{Arctan}\, x + C_2$

 Vu la limite en 1 ou $-\infty$, ou alors la valeur $f(0)$,

$$f(x) = \text{Arctan}\, x + \frac{\pi}{4}$$

Donc en fait $f(x) = \begin{cases} \text{Arctan}\, x + \frac{\pi}{4} & \text{si } x < 1 \\ -\text{Arctan}\, x + \frac{3\pi}{4} & \text{si } x > 1 \end{cases}$