(a) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A \longmapsto \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

* $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A et $-A$ commutent donc

$$\exp(A)\exp(-A) = \exp(A-A) = \exp(0) = I_n$$

donc $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{K})$

Ainsi exp est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{K}) \subsetneq \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

donc <u>exp n'est pas surjective.</u>

* Avec $D = \begin{pmatrix} 2i\pi & & (0) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$, on a

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{2i\pi} & & (0) \\ & e^0 & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & e^0 \end{pmatrix}$$

$$= I_n$$

$$= \exp(0)$$

avec $D \neq 0$, donc <u>exp n'est pas injective</u>

* On peut vouloir montrer la non injectivité sur $M_n(\mathbb{R})$.

Notons $A = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2\pi & \\ -2\pi & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right)$ définie par blocs.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -(2\pi)^2 & 0 \\ 0 & -(2\pi)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -(2\pi)^3 \\ (2\pi)^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} (2\pi)^4 & 0 \\ 0 & (2\pi)^4 \end{pmatrix}$$

$A^0 = I_n$ et par récurrence,

$$\forall p \geqslant 1 \quad A^{2p} = (-1)^p (2\pi)^{2p} \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\forall p \geqslant 0 \quad A^{2p+1} = (-1)^p (2\pi)^{2p+1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{2N+1} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p)!} A^{2p} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)!} A^{2p+1}$$

$$= I_n + \sum_{p=1}^{N} \left(\frac{(-1)^p (2\pi)^{2p}}{(2p)!} \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \right) + \sum_{p=0}^{N} \left(\frac{(-1)^p (2\pi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right) \right)$$

$$= I_n + \left(\sum_{p=1}^{N} \frac{(-1)^p (2\pi)^{2p}}{(2p)!} \right) \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \left(\sum_{p=0}^{N} \frac{(-1)^p (2\pi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[N \to +\infty]{} I_n + (\cos(2\pi) - 1) \left(\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) + \sin(2\pi) \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Donc $\exp(A) = I_n = \exp(0)$, donc exp non injective.

(b) • On a envie d'écrire $\dfrac{1}{I_n+U} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-U)^k$

en pensant aux séries géométriques. Il n'en est

bien-sûr pas question sous cette forme !

• $\sum_{k\geq 0}(-U)^k$ converge absolument car

$$\|(-U^k)\| \leq \|U\|^k \quad \text{t.g série géom. convergente.}$$

• On calcule :

$$(I_n+U)\sum_{k=0}^{N}(-U)^k = \sum_{k=0}^{N}(-U)^k + \sum_{k=0}^{N}(-1)^k U^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k U^k - \sum_{k=1}^{N+1}(-1)^k U^k$$

par glissement d'indice

$$= I_n - (-1)^{N+1}U^{N+1}$$

or $\|(-1)^{N+1}U^{N+1}\| = \|U^{N+1}\|$

$\leq \|U\|^{N+1}$ car $\|.\|$ sous multiplicative

$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ car $\|U\|<1$

Ainsi $(I_n+U)\sum_{n=0}^{+\infty}(-U)^k = I_n$

Comme (I_n+U) est une matrice carrée, c'est

que (I_n+U) est inversible et $(I_n-U)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-U)^k$

- Soit $M \in B(0, \frac{1}{2})$ ie $\|M\| < \frac{1}{2}$.

On suppose que $\exp(M) = I_n$

Alors :

$$\begin{aligned}
0 &= \exp(M) - I_n \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k \\
&= M \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} M^k \right) \\
&= M \Big(I_n + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} M^k}_{\text{noté } U} \Big)
\end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned}
\|U\| &= \left\| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} M^k \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \|M\|^k \qquad \text{car } \|.\| \text{ sous multiplicative} \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \frac{1}{2^k} \\
&= 2 . \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= 2\left(e^{1/2} - 1 - \frac{1}{2}\right) \\
&< 0,4 \\
&< 1
\end{aligned}$$

avec $e < 3$
donc $\sqrt{e} < \sqrt{3} < 1,7$

donc $(I_n + U)$ inversible par le point précédent,

et donc $\underline{M = 0}$

- Soit $M, N \in B(0, \frac{1}{4})$ tq $MN = NM$ et $\exp(M) = \exp(N)$.

Alors $\exp(M)\exp(-N) = I_n$

$\quad\quad\quad\quad\quad \| $

$\quad\quad\quad \exp(M-N)$ car $MN = NM$

or $\|M - N\| \leq \|M\| + \|N\|$

$$< \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

donc, par le point précédent, $\underline{M = N}$.