(a) Raisonnons par récurrence sur $n \geq 1$

- $\|A^1\| = \|A\| = \|A\|^1$

- On suppose $\|A^n\| \leq \|A\|^n$

Alors $\|A^{n+1}\| \leq \|A^n\| \, \|A\|$ car $\|.\|$ sous-multiplicative

$\leq \|A\|^n \, \|A\|$ par H.R

$= \|A\|^{n+1}$

Donc, $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \|A^n\| \leq \|A\|^n}$

(b) $\|A^n\| \leq \|A\|^n$

t.g série convergente car $\|A\| < 1$

donc $\sum A^n$ converge absolument dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ de dimension finie, donc $\underline{\sum A^n \text{ converge}}$.

(c) On calcule :

$$(I_p - A) \sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{N} A^n - \sum_{n=0}^{N} A^{n+1}$$

$$= I_p - A^{N+1} \quad \text{par télescopage}$$

or $\|A^{N+1}\| \leq \|A\|^{N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ car $\|A\| < 1$

donc $(I_p - A) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = I_p$

en passant à la limite, avec la continuité du produit matriciel.

Comme $I_p - A$ est carrée, c'est que :

$$I_p - A \text{ inversible et } (I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n .$$