$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n$$

$$g(x) = (f(x))^2$$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, x^n$$

(a) On veut justifier ici que g admet un DSE de rayon ≥ 1.

Mais $f(x)$ est une somme de SE de rayon 1

(car $\sqrt{n}\, x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ pour $|x| < 1$

$\sqrt{n}\, x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ pour $x > 1$)

donc $g(x)$ est D.S.E comme produit (de Cauchy) de deux SE, et son rayon est $\geq \text{Min}(R_f, R_f) = 1$.

<u>Ainsi</u> il existe $(u_n)_n$ tq $\forall x \in]-1, 1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$

(b) • Par produit de Cauchy, on a :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \sqrt{n-k}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} \sqrt{1 - \frac{k}{n}}$$

$$= n^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \sqrt{1 - \frac{k}{n}}}_{\text{noté } S_n} \qquad \text{(terme nul pour } k=n\text{)}$$

On reconnait une somme de Riemann de la fonction <u>continue</u> $t \longmapsto \sqrt{t}\sqrt{1-t}$ sur $[0,1]$, donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1-t}\, dt$

On peut donc écrire : $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \cdot K}$

où $K = \int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1-t}\,dt$

- <u>Calculons</u> :

$$K = \int_0^1 \sqrt{t}\sqrt{1-t}\,dt \qquad \begin{aligned} t &= \sin^2 u \\ dt &= 2\cos u \sin u\,du \\ u &\text{ de } 0 \text{ à } \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} |\sin u|\,|\cos u|\; 2\cos u \sin u\,du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^2 u \quad du$$

avec $\sin^2 u \cos^2 u = \left(\frac{e^{iu}-e^{-iu}}{2i}\right)^2 \left(\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}\right)^2$

$$= -\frac{1}{16}\cdot\left(e^{2iu}-e^{-2iu}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{16}\left(e^{4iu}-2+e^{-4iu}\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\cos 4u + \frac{1}{8}$$

$$K = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} 1-\cos 4u \quad du$$

$$= \frac{1}{4}\left[u - \frac{1}{4}\sin(4u)\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

- Finalement : $\underline{u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{8} n^2}$.

(c) Pour $x \in]-1, 1[$, on a $\left(\text{avec } R\left(\sum n^2 x^n\right) = R\left(\sum x^n\right) = 1\right)$

$$\begin{aligned}
h(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1) + n\right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^n && \text{(2 SE de rayon 1)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^n && \text{1}^{\text{er}} \text{ termes nuls} \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\
&= x^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^3} + x \cdot \frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

en utilisant les dérivées de $\sum x^n$

$$= \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

Comme $x^2 + x^2 \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 2$, on a $h(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{2}{(1-x)^3}$

(d) On peut se dire que, dans la mesure où $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{8} n^2$, on aura $g(x) \underset{x \to 1}{\sim} \frac{\pi}{8} h(x)$. Mais il faut justifier ce résultat "à la main" dans la mesure où on n'a pas de tel théorème au programme.

On envisage :

$$\left| g(x) - \frac{\pi}{8} h(x) \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \left(u_n - \frac{\pi}{8} n^2 \right) x^n \right|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| u_n - \frac{\pi}{8} n^2 \right| x^n \qquad \text{pour } x \in [0,1[$$

Fixons $\varepsilon > 0$.

Par définition de $u_n = \frac{\pi}{8} n^2 + o(n^2)$ appliquée avec $\frac{\varepsilon}{2}$,

il existe N tq $\forall n \geq N$, $\quad \left| u_n - \frac{\pi}{8} n^2 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} n^2$.

On reprend la majoration :

$$\left| g(x) - \frac{\pi}{8} h(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{N} \left| u_n - \frac{\pi}{8} n^2 \right| x^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} n^2 x^n$$

avec $x < 1$

$$\leq \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \left| u_n - \frac{\pi}{8} n^2 \right|}_{\text{Constante } C} + \frac{\varepsilon}{2} h(x)$$

en ajoutant des termes ≥ 0

Pour $x \xrightarrow{<} 1$, par l'équivalent, $h(x) \longrightarrow +\infty$ donc par définition de limite infinie appliquée à $\frac{2C}{\varepsilon}$,

il existe $\eta > 0$ tq, $\forall x \in]1-\eta, 1[\qquad h(x) \geq \frac{2C}{\varepsilon}$

ie $C \leq \frac{\varepsilon}{2} h(x)$

On a montré : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq

$$\forall x \in]1-\eta, 1[\quad \left| g(x) - \frac{\pi}{8} h(x) \right| \leq \varepsilon h(x)$$

c'est-à-dire : $\underline{g(x) = \frac{\pi}{8} h(x) \underset{x \to 1^-}{+ o} (h(x))}$

Par suite, au voisinage de $x \xrightarrow{<} 1$:

$$g(x) \sim \frac{\pi}{8} h(x)$$
$$\sim \frac{\pi}{4(1-x)^3}$$

et donc, en élevant à la puissance $\frac{1}{2}$:

$$\underline{f(x) \underset{x \xrightarrow{<} 1}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^{3/2}}}$$