$((xy)z)$ ou $(x(yz))$ ?

$(((xy)z)t)$ ou $((xy)(zt))$ ou $(x(y(zt)))$

ou $((x(yz))t)$ ou $(x((yz)t))$ ?

(a) Pour $x \in ]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en posant $a_0 = 0$

Par produit de Cauchy on a

$$(f(x))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad \text{(rayon } \geq R)$$

où $$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = a_n & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

donc $$(f(x))^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$$

$$= f(x) - a_1 x$$

On a montré : $\underline{\forall x \in ]-R, R[ \quad (f(x))^2 - f(x) + x = 0}$

(b) • Comme $f(x)$ est solution réelle de $y^2 - y + x = 0$,

on a $\Delta = 1 - 4x \geq 0$ donc $\underline{x \leq \frac{1}{4}}$

• Pour $x \leq \frac{1}{4}$, nécessairement :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-4x}\right)$$

ou

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

À $x$ fixé, c'est bien l'une ou l'autre des expressions que vaut $f(x)$. On peut penser que ça n'en sera en fait qu'une seule (c'est ce qu'on va montrer), et plutôt la seconde (sinon ça ne coïncide pas en 0)

- Notons $g(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$. Par opérations, $g$ admet un D.S.E sur $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. On note pour l'instant $(b_n)_n$ tq $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ce D.S.E de $g$.

On a : $b_0 = g(0) = 0$

$b_1 = g'(0) = 1$ car $g'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-4)}{2\sqrt{1-4x}}$

et comme $\left(g(x)\right)^2 = g(x) - x$, en remontant les calculs de (a), on a

$$\forall n \geqslant 2 \quad b_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k}$$

Ainsi, par récurrence forte sur $n$, on a :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = a_n}$$

Et par conséquence,

$$\underline{\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)}$$

On a montré que $R \geqslant \frac{1}{4}$, et comme $\mathcal{C}_g$ admet une tangente verticale en $\frac{1}{4}$, $R \leqslant \frac{1}{4}$ donc $\underline{R = \frac{1}{4}}$

(c) Pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-4x)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,1.\,1.\,3.\,5.\,\ldots\,(2n-3)}{2^n\; n!}(-1)^n 4^n x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3.\,5.\,\ldots\,(2n-3)}{n!}\,2^{n-1} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}\, x^n$$

Par unicité des coefficients d'un D.S.E :

$$\underline{a_n = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}}$$

(d) Soit $n \geq 2$. On veut compter le nombre de parenthésages de l'expression $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Parenthéser, c'est choisir $k$ entre $1$ et $(n-1)$, et noter l'expression

$$\underbrace{(x_1 \ldots x_k)}_{X_k}\; x_{k+1} \ldots x_{n-1}$$

$$X_k \quad x_{k+1} \ldots x_{n-1}$$

Parenthéser cette expression, c'est parenthéser la parenthèse

($a_k$ façons) et parenthéser $x_k x_{k+1} \cdots x_{n-1}$

($a_{n-k}$ façons).

On a donc $$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \quad \forall n \geq 2$$