

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \text{pour } x \in [-1, 1]$$

On note $g_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$

① Étude de la continuité sur $[-1, 1]$

• les g_n sont continues sur $[-1, 1]$

• $\forall x \in [-1, 1], \quad |g_n(x)| = \frac{|x|^n}{n^2}$

$$\leq \frac{1}{n^2} \quad \text{indép. de } x$$

$\uparrow$ t.g. série convergente

donc $\sum g_n$ cv normalement, donc uniformement

sur $[-1, 1]$

par transfert de continuité, g est continue sur $[-1, 1]$

② Étude de la classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1 [$

• les g_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1 [$

$$\text{et } g'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n}$$

• $\sum g_n$ converge simplement sur $] -1, 1 [$

- $\forall x \in [-a, a] \subset]-1, 1[$

$$\begin{aligned}
 |g'_n(x)| &= \frac{|x|^{n-1}}{n} \\
 &\leq \frac{a^{n-1}}{n} \\
 &\leq a^{n-1} \quad \text{indép. de } n \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{t.g. série convergente}
 \end{aligned}$$

Donc $\sum g'_n$ converge normalement, donc uniformement sur $[-a, a]$.

Par le th de classe $\mathcal{C}^1$, g est $\mathcal{C}^1$ sur tout
 $[-a, a] \subset]-1, 1[$, donc sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \underline{g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}}$$

③ Étude de la dérivabilité en 1 (à gauche)

On a envie d'écrire:

$$\begin{aligned}
 g'(u) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^{n-1}}{n} \\
 &\xrightarrow{u \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty
 \end{aligned}$$

- Montrer que $g'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$ en revenant à la définition.

Soit $A > 0$.

Par définition de la divergence de $\sum \frac{1}{n}$,

$$\text{il existe } N \text{ tq } \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq A + \frac{1}{2}$$

Écrivons alors, pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \\ &\geq \sum_{n=1}^N \frac{x^{n-1}}{n} \quad \text{Car } \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \geq 0 \end{aligned}$$

Mais, maintenant que N est fixé, on peut dire que

$$\sum_{n=1}^N \frac{x^{n-1}}{n} \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \quad \text{par CL (finie) de limites}$$

Donc, par définition de limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall x \in [1-\alpha, 1[, \left| \sum_{n=1}^N \frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Reprenons, pour $x \in [1-\alpha, 1[$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} \\ &\geq \sum_{n=1}^N \frac{x^{n-1}}{n} \\ &\geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \\ &\geq \left(A + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \\ &= A \end{aligned}$$

On a montré que $g'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 1^-]{} +\infty$

- Par ①, g est continu en 1 (à gauche)

Donc, par le th. limite de la dérivée,

g n'est pas dérivable en 1, et sa courbe
présente en 1 une tangente verticale.