$$J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2 - 1} \, dx$$

(a) • $x \longmapsto \dfrac{x^{2n+1} \ln x}{x^2-1}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$

• Au voisinage de $x \to 0$

$$\frac{x^{2n+1} \ln x}{x^2-1} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \qquad \text{car } x \ln x \to 0$$

donc l'intégrale est faussement généralisée, donc convergente, en 0.

• Au voisinage de $x \to 1$. Pour $h \to 0$

$$\frac{(1-h)^{2n+1} \ln(1-h)}{(1-h)^2 - 1} \underset{h \to 0}{\sim} \frac{1.(-h)}{-2h} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{2}$$

donc l'intégrale est faussement généralisée, donc convergente, en 1

Ainsi, <u>l'intégrale définissant J_n existe</u>.

(b) On calcule :

$$J_n - J_{n+1} = \int_0^1 \frac{(x^{2n+1} - x^{2n+3}) \ln x}{x^2 - 1} \, dx$$

$$= \int_0^1 - x^{2n+1} \ln x \, dx$$

par parties, sous réserve de limites finies du crochet :

$$J_n - J_{n+1} = \left[-\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \cdot \ln x \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{x^{2n+2}}{2n+2} \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2n+2} \int_0^1 x^{2n+1} \, dx$$

$$= \frac{1}{(2n+2)^2}$$

$$= \frac{1}{4(n+1)^2}$$

(c) • Exploitons le lien suite-série :

$$\int_0^1 \frac{x \ln x}{x^2-1} \, dx = J_0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(J_k - J_{k+1} \right) + J_{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{x^{2n+3} \ln x}{x^2-1} \, dx$$

• D'une part,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4(k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad \text{(série cv)}$$

• D'autre part,

$* \ \forall x \in]0,1[\qquad \dfrac{x^{2n+3} \ln x}{x^2-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$*$ Dominons :

$$\left| \frac{x^{2n+3} \ln x}{x^2-1} \right| \leq \left| \frac{x \ln x}{x^2-1} \right|$$

où $x \mapsto \dfrac{x \ln x}{x^2-1}$ est indépendante de n,

et intégrable sur $]0,1[$ par (a) avec $n=0$

Donc, par convergence dominée :

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+3}\ln x}{x^2-1}\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a donc montré que $\displaystyle \underline{\int_0^1 \frac{x \ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}}$