Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}\,dt = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$

Pour $t>0$, $\frac{t^2}{e^t-1} = \frac{t^2 e^{-t}}{1-e^{-t}}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}$ série géom. de raison $e^{-t}\in]0,1[$.

Comme $t^2e^{-nt}>0$, on calcule dans $[0,+\infty]=[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$:

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt$$

Avec, par parties, sous réserve de limites finies des crochets et de convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-nt}\,dt$$

$$= \left[t^2\left(-\frac{1}{n}\right)e^{-nt}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2t\left(-\frac{1}{n}\right)e^{-nt}\,dt$$

$$= 0 + \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} t\,e^{-nt}\,dt$$

$$= \frac{2}{n}\left[t\left(-\frac{1}{n}\right)e^{-nt}\right]_0^{+\infty} - \frac{2}{n}\int_0^{+\infty} 1\left(-\frac{1}{n}\right)e^{-nt}\,dt$$

$$= 0 + \frac{2}{n^2}\int_0^{+\infty} e^{-nt}$$

$$= \frac{2}{n^2}\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{n^3}$$

Donc $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3} < +\infty$ (Série de Riemann)

Ainsi, les intégrales et séries manipulées sont toutes convergentes et $\underline{I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3} \in \mathbb{R}}$