$$u_n(t) = \frac{\operatorname{Arctan}(nt)}{n^2}$$

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé,

$$|u_n(t)| = \frac{|\operatorname{Arctan}(nt)|}{n^2}$$

$$\leq \frac{\pi}{2n^2}$$ t.g. d'une série absolument convergente

Ce majorant est indépendant de t, donc on a montré la convergence normale.

Donc $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

(b) • La convergence est normale, donc uniforme, sur $\mathbb{R}$, et les u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, donc par transfert de continuité, S est continue sur $\mathbb{R}$

• $\forall t \in \mathbb{R}$,
$$S(-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(-nt)}{n^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\operatorname{Arctan}(nt)}{n^2}$$ par imparité de Arctan
$$= -S(t)$$

donc S est impaire

(c) Appliquons le th. de double limite :

* $\sum u_n$ converge uniformément sur $]-\infty, +\infty[$

(il suffit d'exploiter la cv uniforme sur $[1, +\infty[$ par ex)

* à $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $u_n(t) = \frac{\text{Arctan}(nt)}{n^2}$

$$\xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{\pi}{2n^2}$$

Donc par double limite

$$S(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2n^2}$$
$$= \frac{\pi^3}{12}$$

(d) Si $t_1 < t_2$, $\quad$ alors $\quad \text{Arctan}(nt_1) \leq \text{Arctan}(nt_2)$

donc $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nt_1)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(nt_2)}{n^2}$

ie $\quad S(t_1) \leq S(t_2)$.

On a montré que S est croissante

(e) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$\frac{u_n(t)}{t} = \frac{\text{Arctan}(nt)}{n \cdot nt}$$
$$\xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{n} \qquad \text{car } \text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$$

donc, par somme finie

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \xrightarrow[t \to 0]{} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

En appliquant la définition de limite avec $\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} > 0$,

il existe t_0 tq $\forall t \in]-t_0, t_0[\setminus \{0\}$,

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

et donc $\displaystyle \sum_{n=1}^{N} \frac{u_n(t)}{t} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$

(f) On va démontrer, en revenant à la définition, que

$$\frac{S(t) - S(0)}{t-0} \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty$$

Soit $A > 0$.

On sait que $\displaystyle \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$

donc il existe N tq $\displaystyle \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \geq 2A$

(l'inégalité sera vraie à partir de N, mais seule celle

pour N sera utile)

Par (e), $\exists t_0$ tq $\forall t \in]-t_0, t_0[\setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{S(t) - S(0)}{t-0} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(nt)}{t} \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{Arctan}(nt)}{t} && \text{on enlève des termes} \geq 0 \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} && \text{par (e)} \\
&\geq A && \text{par choix de } N
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle \frac{S(t)-S(0)}{t-0} \xrightarrow[t\to 0]{} +\infty$, donc S non dérivable en 0

mais la courbe présente une tangente verticale.

(g)