$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$

(a) Chercher le domaine de définition de ζ, c'est chercher le domaine de convergence simple de la série de fonctions.
On reconnaît une série de Riemann, convergente ssi $x > 1$

Donc ζ est définie sur $]1, +\infty[$

(b) • $\forall x \in]1, +\infty[$, $f_n(x) = e^{-x \ln n}$
donc les f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a, par récurrence :

$$f_n^{(k)}(x) = (-\ln n)^k \frac{1}{n^x}$$

• Pour $x \in [a, +\infty[\subset]1, +\infty[$,

$$\left| f_n^{(k)}(x) \right| = \frac{(\ln n)^k}{n^x} \leq \frac{(\ln n)^k}{n^a}$$ indépendant de x.

et c'est le t.g. d'une série convergente car, au voisinage de $n \to +\infty$,

$$\frac{(\ln n)^k}{n^a} = \frac{o\left(n^{\frac{a-1}{2}}\right)}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}\right)$$

où $\frac{a+1}{2} > 1$

On a donc établi que $\forall k$, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur tout $[a,+\infty[\, \subset \,]1,+\infty[$.

- On en déduit que ζ est $\mathcal{C}^k$ pour tout k, sur tout $[a,+\infty[\, \subset \,]1,+\infty[$ donc ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$

et $$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$$

(c) On a montré en particulier que $$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x} < 0 \quad \forall x \in]1,+\infty[$$

x	1	$+\infty$
ζ'	‖	$-$
ζ	‖	$\searrow$

(d) • Pour $x \longrightarrow +\infty$, on a $$f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{x\ln n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note ℓ_n cette limite.

De plus, on a montré en (b) que $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[2,+\infty[$ (ou tout $[a,+\infty[$)

Donc par le th de la double limite,

$$\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \ell_n = 1$$

- On s'intéresse à $\zeta(x) - 1 - \frac{1}{2^x} = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ que l'on estime par une comparaison série/intégrale.

À $x>1$ fixé, $t \longmapsto \frac{1}{t^x}$ est continue, décroissante donc

$$0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{-x+1} t^{-x+1}\right]_2^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2^{x-1}}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2^x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^x}\right)$$

On a montré $\underline{\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + o\left(\frac{1}{2^x}\right)}$

(e) On fait aussi une comparaison série/intégrale.

À $x>1$ fixé, $t \longmapsto \frac{1}{t^x}$ est continue, décroissante donc :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \left[\frac{1}{-x+1} t^{-x+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x-1}, \qquad 1 + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Bref : $\underline{\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}}$

On en déduit $\zeta(x) \underset{\substack{x \to 1 \\ >}}{\sim} \dfrac{1}{x-1} \xrightarrow[\substack{x \to 1 \\ >}]{} +\infty$

(f) On peut compléter le tableau de variations :

x	1		$+\infty$
ζ'	||	$-$	
ζ	|| $+\infty$	$\searrow$	1

et la courbe :