

531.50

Soit a, b deux réels tels que $0 < a < 1 < b$, et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

(a) Montrer que la suite de terme général $\int_a^b \frac{f(x)}{1+x^n} dx$ converge vers

$$\int_a^1 f(x) dx.$$

(b) Montrer que :

$$\int_a^1 \frac{f(x)x^n}{1+x^n} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} f(1) \ln(2)$$


a) Soit $f_n: x \mapsto \frac{f(x)}{1+x^n}$

~~À pr~~ $\forall x \in [a, 1[$, $\frac{f(x)}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$

$\forall x \in]1, b]$, $\frac{f(x)}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

pour $n=1$ $\frac{f(1)}{1+1^n} \rightarrow \frac{f(1)}{2}$

Donc $f_n(x)$ converge simplement vers $g: x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a, 1[\\ 0 & \text{si } x \in]1, b] \\ \frac{f(1)}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

Dominais:

$\left| \frac{f(x)}{1+x^n} \right| \leq |f(x)| \quad \forall x \in [a, b]$ et $f(x)$ est intégrable car cpm sur $[a, b]$.

On a donc:

$$\int_a^b \frac{f(x)}{1+x^n} dx \rightarrow \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^1 f(x) dx$$

b) $f \in \mathcal{C}^1$.

$\int_a^b \frac{f(x) x^n}{1+x^n} dx = \int_a^b \frac{x f(x) x^{n-1}}{1+x^n} dx$ par parties

$$= \left[x f(x) \frac{\ln(1+x^n)}{n} \right]_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b (x f'(x) + f(x)) \ln(1+x^n) dx$$

$$= \frac{f(b) \ln(b)}{n} - \frac{a f(a) \ln(1+a^n)}{n} - \frac{1}{n} \int_a^b (x f'(x) + f(x)) \ln(1+x^n) dx$$

$$[a, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Soit $f_n: x \mapsto (x f'(x) + f(x)) \ln(1+x^n)$

$$\forall x \in [a, 1], \quad \ln(1+x^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc f_n converge simplement vers 0.

Démontrons:

$$|(x f'(x) + f(x)) \ln(1+x^n)| \leq |x f'(x) + f(x)| \ln(2)$$

indépendant de n et intégrable car f sur $[a, 1]$.

$$\text{Donc } \int_a^1 (x f'(x) + f(x)) \ln(1+x^n) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{Donc } \frac{1}{n} \int_a^1 (x f'(x) + f(x)) \ln(1+x^n) dx = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

De même, $a f(a) \frac{\ln(1+a^n)}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\text{Donc } \int_a^1 \frac{f(x) x^n}{1+x^n} dx \sim \frac{f(1) \ln(2)}{n}$$