

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}} dx$$

(a) • $x \mapsto \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, +\infty[$

• Au voisinage de $x \rightarrow +\infty$, $n > 1$ donc $x^n > x$

$$\begin{aligned} \text{on a } \left| \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}} \right| &= \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x^n} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} \\ &\leq e^{-x} \quad \text{intégrable en } +\infty \end{aligned}$$

• Au voisinage de $x \rightarrow 0$

$$\text{on a } \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{intégrable en } 0$$

Donc $x \mapsto \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$

et donc I_n existe.

(b) Notons $f_n: x \mapsto \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}$

• Étude de la convergence simple : soit $x \in]0, +\infty[$ fixé.

$$* \text{ si } x \in]0, 1[, \quad x^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$* \text{ si } x = 1, \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$$

$$* \text{ si } x > 1, \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Montrer $(f_n)_n$ converge simplement vers f où :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ e^{-x} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

• les f_n et f sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$

• Dominance.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in]0, +\infty[. \quad |f_n(x)| = \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}$$

$$* \text{ si } x \in]0, 1[, \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$* \text{ si } x \in [1, +\infty[, \quad |f_n(x)| \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}$$

$$\text{On a donc } |f_n(x)| \leq \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ e^{-x} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

où φ est indépendante de n et intégrable sur $]0, +\infty[$

Ainsi, par convergence dominée

$$\begin{aligned} I_n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= [2\sqrt{x}]_0^1 \\ &= 2 \end{aligned}$$
