On définit $(u_n)_n$ suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En déduire, pour tout $x \in [0,1]$, la convergence de la suite $(u_n(x))_n$.

3. Établir que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction u non nulle, vérifiant :

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

(1) On raisonne par récurrence sur n :

- Pour $x \in [0,1]$,

$$u_1(x) - u_0(x) = 1 + \int_0^x 1\,dt - 1$$
$$= x$$

donc $\quad 0 \leq u_1(x) - u_0(x) \leq \dfrac{x^1}{1!}$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$\forall y \in [0,1], \quad 0 \leq u_{n+1}(y) - u_n(y) \leq \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}$$

Soit alors $x \in [0,1]$. On a :

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_{n+1}(t-t^2)\,dt - \left(1 + \int_0^1 u_n(t-t^2)\,dt\right)$$

$$= \int_0^x u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2)\,dt$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a donc :

$$0 \leq u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

$$\leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$

$$= \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

- La propriété est donc établie pour tout n.

(b) Soit $x \in [0,1]$ fixé.

Comme $\sum \frac{x^n}{n!}$ est une série convergente (la série exponentielle), par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \left(u_{n+1}(x) - u_n(x)\right)$ converge.

D'après le <u>lien suite-série</u>, c'est que <u>$(u_n(x))_n$ converge</u>.

On note $u(x)$ sa limite.

(c) • On a :

$\forall x \in [0,1]$

$$|u(x) - u_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(u_k(x) - u_{k-1}(x) \right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x) - u_{k-1}(x)|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{par (a)}$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}}_{} \quad \underline{\text{indépendant de } x}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{comme reste d'une série convergente}$$

On a montré $\underline{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{CU} u \text{ sur } [0,1]}$.

• Par récurrence, u_n est continue sur $[0,1]$ et on vient de montrer la convergence uniforme.

Ainsi, par transfert de continuité, $\underline{u \text{ est continue sur } [0,1]}$

• Soit $x \in [0,1]$

$$\left| \int_0^x u_n(t-t^2)\,dt - \int_0^x u(t-t^2)\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^x |u_n(t-t^2) - u(t-t^2)|$$

$$\leq \int_0^x \|u_n - u\|_\infty \, dt$$

$$\leq \|u_n - u\|_\infty \cdot 1$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\int_0^x u_n(t-t^2)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^x u(t-t^2)\,dt$

Ainsi, comme $u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,dt$,
à la limite :

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t-t^2)\,dt$$

- On remarque que $u(0) = 1 \neq 0$
  donc <u>u est non nulle</u>

- En dérivant l'intégrale fonction de la borne d'en haut de $t \mapsto u(t-t^2)$ continue, on a donc u $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in [0,1] \quad u'(x) = u(x-x^2)$$