On définit $(u_n)_n$ suite de fonctions définies sur [0,1] par :

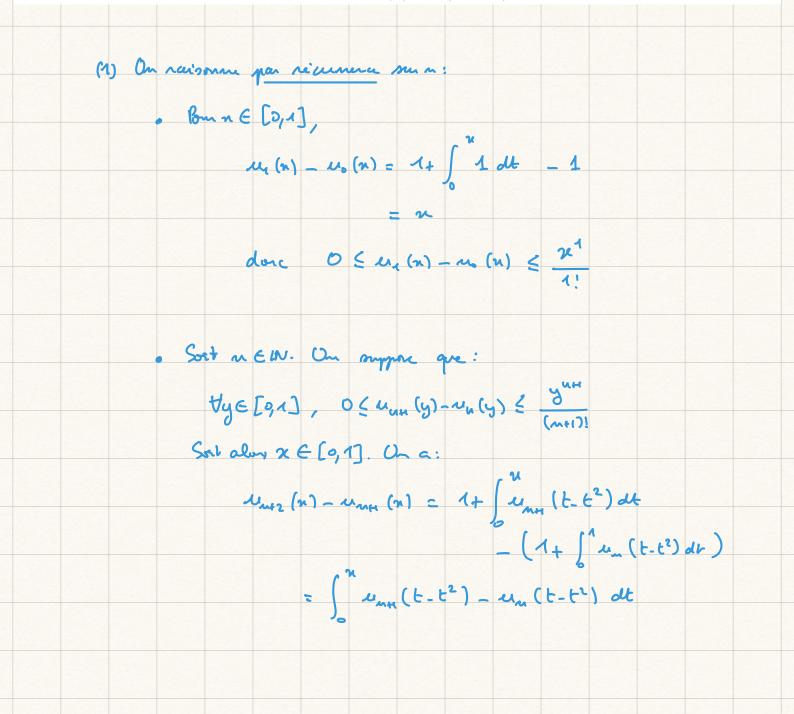
$$u_0(x) = 1$$
 et $u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$

1. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \le u_{n+1}(x) - u_n(x) \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

- 2. En déduire, pour tout $x \in [0,1]$, la convergence de la suite $(u_n(x))_n$.
- 3. Établir que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction u non nulle, vérifiant :

$$u'(x) = u(x - x^2)$$



la l'hypothère de récemence, on a donc: 0 \(\mu_{m+2} \left(n) - \mu_{m+1} \left(n) \\ \left\ \\ \left(m+1)! \\ \left(m+ < (n+1)! dt la propriété et donc établie pour tout n. (b) Soil ne [0,1] fixe. Comme Z 2ª est un sèvie consegute (la série exponerbille), par comparason de series à le me postifs, Z (une (n) - un (n)) converge. D'aprè le l'en suite-sinie, c'est que (un (n1), converge. On note er (n) sa livite.

(C) . On a: Vn∈ [0,1] $|u(x) - u_n(n)| = |\sum_{n=1}^{\infty} (u_k(n) - u_{k-1}(n))|$ $\frac{1}{2} \frac{\chi^2}{2}$ par (a) 1 indipendant de 20 Comer rete d'une seine convergente On a monté un CU u su [2,1], · la récemerce, un est continue on [91] et on viet de montre le convergere suipre. Anx, par transfert de continutté, et est continue en [0,1] Sort n E [0,1] | | | | um (t-t2) dt - | u (t-t2) dr | $\leq \int_{a} |u_{n}(t-t^{2}) - u(t-t^{2})|$ { | llun - ulla dt < llun-ullas. 1 W-14-

Aris, come une (n) = 1+ [un (E- 62) dt $u(n) = 1 + \int_{0}^{\infty} u(t-t^{2}) dt$ · On remarque que 11(0) = 1 70 doc u et no mulle En dérivant l'intégrale fonction de la lone d'en bout de tps u(t-t2) contine, on a doc en 61 er tre [0,1] u'(n) = u(x-n2)