Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, intégrable sur $[0,+\infty[$, à dérivée intégrable sur $[0,+\infty[$.

(a) Pour $x>0$, déterminer la limite de :

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n\cos t \sin^n t f(xt)\,\mathrm{d}t$$

(b) Préciser le mode de convergence.

(a) Soit $x>0$ fixé.

Comme f est $\mathcal{C}^1$, on effectue une intégration par parties sous réserve de limites finies du crochet et convergence d'une intégrale :

$$u_n(x) = \int_0^{+\infty} n \cos t \sin^n t \quad f(xt) \quad dt$$

$$= \left[\frac{n}{n+1}\sin^{n+1}(t) \quad f(xt)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{n}{n+1}\sin^{n+1}(t)\, x . f'(xt)\,dt$$

Or $f(y) = f(0) + \int_0^y f'(r)\,dr$

$$\xrightarrow[y\to+\infty]{} f(0) + \int_0^{+\infty} f'(r)\,dr \quad \text{car } f' \text{ intégrable sur } [0,+\infty[$$

donc f admet une limite finie en $+\infty$. Or elle est intégrable en $+\infty$, donc cette limite est nulle : $f(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, le crochet est nul et on a :

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1}\int_0^{+\infty}\sin^{n+1} t \,.\, x\, f'(xt)\,dt$$

On étudie la limite de l'intégrale par convergence dominée :

• À t fixé (et x aussi)

$$|\sin^{n+1} t| \, x \, f'(xt) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x f'(xt) & \text{sinon} \end{cases}$$

• Dominons : $\forall t \in [0, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|\sin^{n+1} t \, x \, f'(xt)| \leq \underbrace{x f'(xt)}_{\text{notée } \varphi(t)} \text{ indép. de } n$$

L'intégrabilité de f' sur $[0, +\infty[$ assure celle de φ.

Donc, par convergence dominée,

$$\int_0^{+\infty} \sin^{n+1} t \, x \, f'(xt) \, dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc, comme $\frac{n}{n+1} \to 1$,

$$\underline{u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

(b) • On a montré en (a) que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CS} (x \mapsto 0)$

• En posant $u = xt$, $du = x\,dt$, on a :

$$u_n(x) = -\frac{n}{n+1} \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{u}{x}\right)^{n+1} f'(u) \, du$$

On veut montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{CU} (x \mapsto 0)$ en revenant à la définition de la limite.

Soit $\varepsilon > 0$.

$$|u_n(x) - 0| = \frac{n}{n+1} \left| \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{u}{x}\right)^{n+1} f'(u)\,du \right|$$

$$\leqslant 1 . \int_0^{+\infty} \left|\sin\left(\frac{u}{x}\right)^{n+1}\right| \, |f'(u)|\,du$$

Comme f' est intégrable, par définition avec $\frac{\varepsilon}{2}$, il existe $A > 0$

tq $\displaystyle\int_A^{+\infty} |f'(u)|\,du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (en fait, $\forall A' > A$ mais un seul A nous suffit)

Donc $\displaystyle |u_n(x)| \leqslant \int_0^A \left|\sin\left(\frac{u}{x}\right)^{n+1}\right| \, |f'(u)| + \int_A^{+\infty} 1 . |f'(u)|\,du$

$$\leqslant \|f'\|_\infty^{[0,A]} \int_0^A \left|\sin\left(\frac{u}{x}\right)\right|^{n+1} du + \frac{\varepsilon}{2}$$

où $\|f'\|_\infty^{[0,A]}$ existe, car f' est continue sur ce segment

Continuons à majorer, en raisonnant par cas.

- pour x assez grand, le sinus sera petit.

pour $x \geqslant \frac{4A}{\pi}$, $0 \leqslant \frac{u}{x} \leqslant \frac{u}{A} \leqslant \frac{\pi}{4}$

donc $\left|\sin\left(\frac{u}{x}\right)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$

donc $\displaystyle |u_n(x)| \leqslant \|f'\|_\infty^{[0,A]} A . \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}$

• pour x plus petit, il faut s'y prendre autrement.

pour $x < \frac{4A}{\pi}$, on pose $u = xt$, $du = x\,dt$

$$\int_0^A \left|\sin\left(\frac{u}{x}\right)\right|^{n+1} du = x \int_0^{A/x} |\sin t|^{n+1}\, dt$$

$$\leq x \int_0^{k\pi} |\sin t|^{n+1}\, dt$$

où $k = \left\lfloor \frac{A}{\pi x} \right\rfloor + 1$

$$\leq x \cdot k \cdot \int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\, dt$$

avec $k \leq \frac{A}{\pi x} + 1$

donc $xk \leq \frac{A}{\pi} + x$

$$\leq \frac{5A}{\pi}$$

$$\leq \frac{5A}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\, dt$$

• Comme $\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1}\, dt \longrightarrow 0$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} \longrightarrow 0$,

il existe N tq $\forall n \geq N$:

$$\int_0^{\pi} (\sin t)^{n+1} \leq \frac{\pi}{5A} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\|f'\|_\infty^{[0,A]}}$$

et $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{A\|f'\|_\infty^{[0,A]}}$$

Alors, $\forall n \geq N$, $\forall x$ $\quad |u_n(x) - 0| \leq \varepsilon$

(et N est bien indépendant de x)

On a montré que la convergence est uniforme.