(a) • <u>Étude de la convergence simple</u>

Soit $x \geqslant 0$ fixé.

Au voisinage de $n \to +\infty$, $n \geqslant x$ donc

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$
$$= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$$
$$= \exp\left(n\left(-\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(-x + o(1)\right)$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$$

Donc <u>$(f_n)_n$ converge simplement vers $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$</u>

• <u>Étude de la convergence uniforme</u>

On pose $g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \leqslant n \\ e^{-x} & \text{si } x > n \end{cases}$

Pour $x \in [0, n[$, $g_n'(x) = -e^{-x} - n\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$

$$= -e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

Il n'est pas évident de déterminer précisément le signe de $g_n'(x)$.

Faisons donc une étude plus qualitative

* Pour $x > n$, $\quad 0 \leq g_n(x) \leq e^{-n}$ de façon directe

* Sur le segment $[0,n]$, $g_n$ est continue donc bornée

et atteint ses bornes. Notons $x_n$ tq $g_n(x_n) = \underset{[0,n]}{\text{Max}}\, g_n$

* On connait l'inégalité $1+u \leq e^u \quad \forall u \in \mathbb{R}$

donc $\quad \left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq e^{-\frac{x}{n}}$

et donc $\quad \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$

donc $\quad \forall x \in [0,n], \quad 0 \leq g_n(x) \leq g_n(x_n)$

* $g_n(0) = 0 < g_n(n) = e^{-n}$

$g'_n(n) = -e^{-n} < 0$

donc $g_n|_{[0,n]}$ n'atteint pas son max en 0 ou n

On a donc $g'_n(x_n) = 0$ car la dérivée s'annule

en un extremum qui n'est pas au bord de l'intervalle

de définition.

On a donc $\quad -e^{-x_n} + \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} = 0$

et donc

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n$$
$$= e^{-x_n}\left(1 - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{n} x_n e^{-x_n}$$
$$\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e} \quad \text{par l'étude suivante:}$$

* Notons $\varphi(t) = t e^{-t}$ $\qquad \varphi'(t) = e^{-t}(1-t)$

| $t$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

* On a finalement montré que

$$\|g_n\|_\infty^{[0,+\infty[} \leq \operatorname{Max}\left(e^{-n}, \frac{1}{en}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$

(b) Notons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x^2)\,dx$

- Appliquons le théorème de convergence dominée :

* Par (a), $\forall x \geqslant 0$, $f_n(x^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x^2}$

(convergence simple de $(x \mapsto f_n(x^2))_{n\in\mathbb{N}}$)

* Pour $x>0$, distinguons deux cas:

si $x^2 \leq n$, $\quad |f_n(x^2)| = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n$

$\leq e^{-x^2}$ par l'étude précédente

si $x^2 > n$ $\quad |f_n(x^2)| = 0$

$\leq e^{-x^2}$

Donc $\forall x \geqslant 0 \quad |f_n(x^2)| \leq e^{-x^2}$ indépendant de $n$

intégrable sur $[0,+\infty[$

Donc, par convergence dominée,

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

- Calculons $I_n$ :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x^2)\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \qquad x = u\sqrt{n},\ dx = \sqrt{n}\,du$$

$$= \int_0^1 (1-u^2)^n \sqrt{n}\,du \qquad u = \cos t,\ du = -\sin t\,dt$$

$$= \sqrt{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2 t)^n (-)\sin t\,dt$$

$$= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt$$

$$= \sqrt{n}\, W_{2n+1}$$

- L'étude des intégrales de Wallis permet d'établir que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

- Ainsi, au voisinage de $n \to +\infty$,

$$I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On a donc montré que $\underline{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$